Zadania powtórzeniowe z Analizy 1 - część 1

Zadanie 1. *Obliczyć* $\operatorname{arctg}(-1)$, $\arccos(\cos(\frac{16\pi}{5}))$, $\cos(\frac{1}{2}\arccos(-\frac{1}{8}))$, $\sin(2\arcsin(\frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}))$, $\operatorname{tg}(\frac{1}{2}\arcsin(\frac{5}{13}))$.

Zadanie 2. *Przedstawić funkcję odwrotną względem funkcji* $f(x)=\frac{\operatorname{ctg}(x-\frac{\pi}{2})}{2}$ *dla* $x\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ *za pomocą funkcji* arcctg.

Zadanie 3. *Udowodnić tożsamość:* **(a)** $\arcsin\sqrt{x}+\arccos\sqrt{x}=\dfrac{\pi}{2}$ *dla* $x\in[0,1]$
(b) $\operatorname{arctg}x+\operatorname{arcctg}x=\dfrac{\pi}{2}$ *dla* $x\in\mathbb{R}$

Zadanie 4. *Wyrazić funkcję odwrotną względem funkcji* $f(x)=2\sin(3x-4)$ *obciętej do przedziału* $[\frac{4}{3}+\frac{\pi}{6},\frac{4}{3}+\frac{\pi}{2}]$ *poprzez funkcję* $\arcsin x$.

Zadanie 5. *Wyznaczyć funkcję odwrotną do funkcji* $f(x)=2\arcsin\dfrac{x+4}{2}-\pi$. *Wyznaczyć jej dziedzinę i zbiór wartości.*

Zadanie 6. *Narysować wykresy funkcji:* **(a)** $y=\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}(-2x))$, **(b)** $y=2\operatorname{arcctg}(\operatorname{tg}x)$, **(c)** $y=\dfrac{\sin(\arccos x)}{\sqrt{1-x^2}}$ *dla* $x\in[0,1)$.

Zadanie 7. *Udowodnić wzory:* **(a)** $\cosh^2 x-\sinh^2 x=1$ **(b)** $\sinh 2x=2\sinh x\cosh x$.

Zadanie 8. *Obliczyć granice ciągów, gdy:*

(a) $a_n=\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2-n}$,

(b) $a_n=\sqrt[3]{2n^3+3n^2+n}-\sqrt[3]{2n^3+n^2-1}$,

(c) $a_n=n\left(\sqrt[3]{8n^3-n}-2n\right)$,

(d) $a_n=n\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{2n^3+5}$,

(e) $a_n=\sqrt[n]{2^{3n+1}+3n+2\cos(\frac{n}{2})}$,

(f) $a_n=\sqrt[n]{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}}$,

(g) $a_n=\dfrac{1}{\sqrt{n^3+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^3+2}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{n^3+n}}$

(h) $a_n=\dfrac{1}{\sqrt{n^4+n}}+\dfrac{2}{\sqrt{n^4+2n}}+\ldots+\dfrac{n}{\sqrt{n^4+nn}}$

(j) $a_n=(0,9999+\frac{1}{n})^n$,

(j) $a_n=(1,0001-\frac{1}{n})^n$,

(k) $a_n=\left(\dfrac{n^3+1}{n^3}\right)^{n^5}$

(l) $a_n=\left(\dfrac{n^2-1}{n^2+1}\right)^{3-n^2}$

(m) $a_n=\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n+7}-n}+\left(\dfrac{3n+1}{7n-1}\right)^n$

(n) $a_n=\dfrac{n\sin(n!)}{n^2+1}+\dfrac{7^n+3^{n-1}}{3^{n+2}-5\cdot 7^n}+\sqrt[n]{9^n+10^n+4}$

(o) $a_n=\left(\dfrac{n-3}{n}\right)^{2n+1}+\sqrt[n]{3^n+4^n}$

(p) $a_n=\sqrt{9n^2+\sqrt{n}}-3n+\left(\dfrac{7n+6}{7n-1}\right)^{-14n}$

Zadanie 9. *Wykazać, że nie istnieją granice*

(a) $\lim\limits_{x\to 0^+}\cos\dfrac{1}{x}$ **(b)** $\lim\limits_{x\to\infty}e^x\cos x$ **(c)** $\lim\limits_{x\to\infty}\sin(x^2)$.

Zadanie 10. *Obliczyć granice (jeśli istnieją)*

(a) $\lim_{x\to 81} \frac{27-\sqrt{x\sqrt{x}}}{3-\sqrt[4]{x}}$ **(b)** $\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x(x+2)}-\sqrt{x(x+1)}\right)$ **(c)** $\lim_{x\to-2}\frac{\sqrt[3]{x-6}+2}{x^3+8}$

(d) $\lim_{x\to 2}\frac{x^2+4x-12}{x^3-8}$ **(e)** $\lim_{x\to\infty}\left(\cos\sqrt{x^2+7}-\cos x\right)$ **(f)** $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x^2+x^3)}{\operatorname{tg}(2x^2+3x^3)}$

(g) $\lim_{x\to 1}(2-x)^{\frac{3x^2}{x^2-1}}$ **(h)** $\lim_{x\to 0}\left(4-3\sqrt[3]{1+4x^2}\right)^{\frac{1}{x^2}}$ **(i)** $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-x^2)}{x\operatorname{tg}x}$

Zadanie 11. *Dobrać (jeśli to możliwe) wartości parametrów a i b, tak aby funkcja*

$$f(x)=\begin{cases} a\frac{1-\cos 2x}{4x^2} & dla \quad x<0,\\ bx+1 & dla \quad x\in[0,1],\\ \frac{x^4-x}{x-1} & dla \quad x>1\end{cases}$$

była ciągła na $\mathbb{R}$.

Zadanie 12. *Zbadać ciągłość funkcji f, jeśli:*

(a) $f\colon(-1,+\infty)\mapsto\mathbb{R}$ $f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^2}{1+x^n}$, **(b)** $f\colon\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}$ $f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{e^{nx}+1}{xe^{nx}+2}$.

Zadanie 13. *Wyznaczyć asymptoty funkcji:*

(a) $f(x)=\exp\left(\frac{x^2+2}{8-2x^2}\right)$, **(b)** $f(x)=5x+\arcsin\left(1-\frac{1}{|x|}\right)$.

Zadanie 14. *Sprawdzić, czy istnieje $f'(x_0)$ gdy*

(a) $f(x)=\begin{cases}3+x\operatorname{arcctg}\frac{-2}{|x|} & dla \quad x\neq 0\\ 3 & dla \quad x=0\end{cases}$, $\quad x_0=0$

(b) $f(x)=\begin{cases}\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{x}\right) & dla \quad x\neq 0\\ 0 & dla \quad x=0\end{cases}$, $\quad x_0=0$

(c) $f(x)=\sqrt{1-\sin x}$, $\quad x_0=\frac{\pi}{2}$

ODPOWIEDZI:

1. $-\frac{\pi}{4}$, $\frac{4\pi}{5}$, $\frac{\sqrt{7}}{4}$, $\frac{\sqrt{7}}{4}$, $\frac{1}{5}$

2. $f^{-1}(x)=\operatorname{arcctg}(2x)-\frac{\pi}{2}$

4. $f^{-1}(x)=(\pi+4-\arcsin(\frac{x}{2}))/3$

5. $f^{-1}(x)=2\cos\frac{x}{2}-4$. $D_{f^{-1}}=[-2\pi,0]$, $Zw_{f^{-1}}=[-6,-2]$.

6. $D_f=\mathbb{R}\setminus\{\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\}$, $D_g=\mathbb{R}$

8. (a) 1 (b) $\frac{2}{3\sqrt[3]{4}}$ (c) $-\frac{1}{12}$(d) 0 (e) 8 (f) 1 (g) 0 (h) $\frac{1}{2}$ (i) 0 (j) ∞ (k) ∞ (l) e^2 (m) 2 (n) 9,8 (o) $e^{-6}+4$ (p) e^{-14}

10. (a) 27 (b) $-\frac{1}{2}$ (c) $\frac{1}{144}$ (d) $\frac{2}{3}$ (e) 0 (f) $\frac{1}{2}$ (g) $\mathrm{e}^{-3/2}$ (h) e^{-4} (i) -1

11. $a=b=2$

12. (a) nieciągła w $x_0=1$ (b) nieciągła w $x_0=0$

13. (a) $y=e^{-1/2}$ - asymptota pozioma obustronna; $x=2$ - asymptota pionowa lewostronna; $x=-2$ - asymptota pionowa prawostronna (b) $y=5x+\frac{\pi}{2}$ - asymptota ukośna obustronna;

14. (a) $f'(x_0)=\pi$ (b) nie istnieje (c) nie istnieje