Zadania powtórzeniowe z Analizy 1 - część 2

Zadanie 1. *Wykazać, że równanie*
$$e^x = 1 + 2x$$
ma co najmniej dwa pierwiastki rzeczywiste.

Zadanie 2. *Obliczyć pochodne podanych funkcji w ich naturalnych dziedzinach.*

a) $f(x) = (3x^2 - 7)e^{-x^2+2x+1}$, **e)** $f(x) = \ln\left(e^{1/x} - x\right)$, **i)** $f(x) = \log\left(\sqrt[3]{x^2}\right)$,

b) $f(x) = e^{-x^2} \cdot \ln x$, **f)** $f(x) = 5\sin^4 x - 2\sin 4x$, **j)** $f(x) = 7^{\sqrt{x}}$,

c) $f(x) = \ln^3 x - e^{-x}$, **g)** $f(x) = \cos\left(\arcsin\left(\frac{1}{x}\right)\right)$, **k)** $f(x) = \log_{(1-x)} \sin x$,

d) $f(x) = e^{\sqrt{\sin x}}$, **h)** $f(x) = \ln\left(\sqrt[5]{x^2 + 2}\right)$, **l)** $f(x) = (\mathrm{tg}x)^{3x^2}$.

Zadanie 3. *Obliczyć pochodną funkcji* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *wszędzie gdzie ona istnieje.*
$$f(x) = \begin{cases} x \,\mathrm{arcctg}\, \frac{1}{x} & \text{dla } x \neq 0 \\ 0 & \text{dla } x = 0 \end{cases}$$

Zadanie 4. *Obliczyć pochodną funkcji* $f(x) = \sqrt{|x|}$, $x \in \mathbb{R}$, *w tych punktach, w których jest ona różniczkowalna.*

Zadanie 5. *Niech* $f(x) = \cos(\sin\sqrt{x})$. *Obliczyć* $\lim_{x\to 0^+} f'(x)$.

Zadanie 6. *Sprawdzić czy pochodna funkcji*
$$f(x) = \begin{cases} x + x^3 \cos\frac{1}{x^2} & \text{jeśli} \quad x \neq 0, \\ 0 & \text{jeśli} \quad x = 0 \end{cases}$$
jest ciągła w punkcie $x_0 = 0$.

Zadanie 7. *Wyznaczyć parametry a, b, c i d tak aby funkcja*
$$f(x) = \begin{cases} ax + b & \text{jeśli} \quad x \leq 0, \\ cx^2 + dx & \text{jeśli} \quad 0 < x \leq 1, \\ 1 - \frac{1}{x} & \text{jeśli} \quad x > 1. \end{cases}$$
miała pochodną na całym zbiorze liczb rzeczywistych.

Zadanie 8. *Znaleźć równanie stycznej (jeśli istnieje) do wykresu funkcji f w punkcie o odciętej* x_0 *jeśli*

a) $f(x) = \mathrm{arctg}(2x),\ x_0 = 0$ **b)** $f(x) = x^{x-x^2},\ x_0 = 2$

Zadanie 9. *Obliczyć przybliżoną wartość wyrażeń:*

a) $1,02^6$ **b)** $\ln 0,998$ **c)** $\mathrm{e}^{0,02}$

Zadanie 10. *Udowodnić nierówności*

a) $\dfrac{y-x}{y} < \ln\dfrac{y}{x} < \dfrac{y-x}{x}$ *dla* $0 < x < y$,

b) $py^{p-1}(x-y) \leq x^p - y^p \leq px^{p-1}(x-y)$ *dla* $0 < y < x$ *oraz* $p > 1$,

c) $\dfrac{\beta-\alpha}{\cos^2\alpha} < \mathrm{tg}\beta - \mathrm{tg}\alpha < \dfrac{\beta-\alpha}{\cos^2\beta}$ *dla* $0 < \alpha < \beta < \dfrac{\pi}{2}$.

Zadanie 11. *Obliczyć*

a) $\lim_{x\to 0^+} \sqrt[7]{x}\ln x$, **d)** $\lim_{x\to 0^+} x^{\sin x}$, **g)** $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{2}{\pi}\mathrm{arctg} x\right)^x$,

b) $\lim_{x\to\infty} \left(\mathrm{arctg} x - \frac{\pi}{2}\right)x$, **e)** $\lim_{x\to+\infty}(1+7x)^{\frac{1}{\sqrt{x}}}$, **h)** $\lim_{x\to 0}(\cos(2x))^{\frac{1}{\sin(3x)}}$,

c) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x\sin x} - \frac{1}{x^2}\right)$, **f)** $\lim_{x\to 1}(2-x)^{\mathrm{tg}\,\frac{\pi x}{2}}$, **i)** $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\mathrm{arctg}\, x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

Zadanie 12. *Udowodnić nierówności:*

a) $\sqrt[3]{1+x} > 1 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^2$ *dla* $x > 0$, **b)** $\sqrt{x} \geqslant \frac{1}{2} + \frac{x}{2} - \frac{(x-1)^2}{8}$ *dla* $x > 1$.

Zadanie 13. *Wyznaczyć ekstrema i przedziały monotoniczności funkcji*

(a) $f(x) = x - 2\mathrm{arctg} x$, **(b)** $f(x) = xe^{-x^3}$, **(c)** $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$.

Zadanie 14. *Wykazać, że prawdziwe są następujące równania i nierówności*

a) $2\mathrm{arctg} x + \arcsin\dfrac{2x}{1+x^2} = \pi$ *dla* $x \geq 1$, **c)** $\mathrm{arctg} x + \mathrm{arctg}\dfrac{1-x}{1+x} = \dfrac{\pi}{4}$ *dla* $x > -1$,

b) $x(2+\cos x) > 3\sin x$ *dla* $x > 0$, **d)** $e^x < 1 + xe^x$ *dla* $x > 0$.

Zadanie 15. *Wyznaczyć asymptoty funkcji*

a) $f(x) = \dfrac{e^x}{4-x^2}$, **b)** $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$.

Zadanie 16. *Zbadać przebieg zmienności i naszkicować wykresy funkcji*

a) $f(x) = \dfrac{x}{\ln^2 x}$, **b)** $f(x) = \exp\left(\dfrac{x}{x-1}\right)$.

Zadanie 17. *Ile pierwiastków ma równanie* $3x^4 - 4x^3 - 6x^2 + 12x - 20 = 0$*?*

Zadanie 18. *Wyznaczyć wartość najmniejszą* m *i największą* M *funkcji* f *na wskazanym przedziale:*

a) $f(x) = \dfrac{1}{x} - \ln\dfrac{1}{x}$, $[e^{-1}, e]$ **b)** $f(x) = \dfrac{x}{\ln^2 x}$, $[e, e^3]$.

ODPOWIEDZI:

1. WSKAZÓWKA: Dwukrotnie wykorzystać twierdzenie Darboux dla funkcji $f(x) = \mathrm{e}^x - 1 - 2x$.

2. (a) $(-6x^3 + 6x^2 + 20x - 14)e^{-x^2+2x+1}$ (b) $-2xe^{-x^2}\ln x + \frac{1}{x}e^{-x^2}$ (c) $\frac{3}{x}\ln^2 x + e^{-x}$
(d) $e^{\sqrt{\sin x}}\frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}}$ (e) $\frac{-\frac{1}{x^2}e^{1/x}-1}{e^{1/x}-x}$ (f) $20\sin^3 x\cos x - 8\cos 4x$ (g) $\frac{1}{x^3\sqrt{1-1/x^2}}$
(h) $\frac{2x}{5(x^2+2)}$ (i) $\frac{2}{3x\ln 10}$ (j) $\frac{7^{\sqrt{x}}\ln 7}{2\sqrt{x}}$ (k) $\frac{\mathrm{ctg}\, x\cdot\ln(1-x) + \frac{1}{1-x}\ln(\sin x)}{\ln^2(1-x)}$ (l) $6x(\mathrm{tg}x)^{3x^2}\left[\ln(\mathrm{tg}x) + \frac{x}{\sin(2x)}\right]$

3. Nie istnieje pochodna tej funkcji w $x = 0$. Dla $x \neq 0$ $f'(x) = \mathrm{arcctg}\,\frac{1}{x} + \frac{1}{x^3+x}$.

4. $$f'(x) = \begin{cases} \frac{-1}{2\sqrt{-x}} & \text{dla} \quad x < 0, \\ \text{nie istnieje} & \text{dla} \quad x = 0, \\ \frac{1}{2\sqrt{x}} & \text{dla} \quad x > 0. \end{cases}$$

5. $-\frac{1}{2}$

6. Pochodna nie jest ciągła.

7. $a = -1, b = 0, c = 1, d = -1$, WSKAZÓWKA: funkcja, która jest różniczkowalna, musi być ciągła.

8. **(a)** $y = 2x$, **(b)** $y = \frac{-1-3\ln 2}{4}x + \frac{3+3\ln 2}{4}$

9. **(a)** $1,12$ **(b)** $-0,002$, **(c)** $1,02$

10. Skorzystać z twierdzenia Lagrange'a dla funkcji (a) $f(t) = \ln t$, (b) $f(t) = t^p$, (c) $f(t) = \operatorname{tg} t$.

11. **(a)** 0, **(b)** $-\frac{1}{2}$, **(c)** -1, **(d)** $\frac{1}{6}$, **(e)** 1, **(f)** 1, **(g)** $e^{\frac{2}{\pi}}$, **(h)** $e^{-2/\pi}$, **(i)** 1, **(j)** $e^{-\frac{1}{3}}$

12. WSKAZÓWKA: (a) skorzystać ze wzoru Maclaurina z $n = 3$, (b) skorzystać ze wzoru Taylora z $x_0 = 1$ i $n = 3$.

13. **(a)** $f_{max}(-1) = \frac{\pi}{2} - 1$, $f_{min}(1) = 1 - \frac{\pi}{2}$, rośnie w przedziałach $(-\infty, -1)$ oraz $(1, \infty)$, maleje dla $x \in (-1, 1)$

(b) $f_{max}\left(\sqrt[3]{\frac{1}{3}}\right) = \sqrt[3]{\frac{1}{3}}e^{-\frac{1}{3}}$, rośnie dla $x \in \left(-\infty, \sqrt[3]{\frac{1}{3}}\right)$, maleje dla $x \in \left(\sqrt[3]{\frac{1}{3}}, \infty\right)$

(c) $f_{max}(e) = \frac{1}{e}$, rośnie dla $x \in (0, e)$, maleje dla $x \in (e, \infty)$

14. WSKAZÓWKI:

(a) rozpatrzyć funkcję $f(x) = 2\mathrm{arctg}x + \arcsin\frac{2x}{1+x^2}$ i zauważyć, że jest ona stała na $[1, \infty)$ oraz $f(1) = \pi$,

(b) można rozpatrzyć funkcję $f(x) = x - \frac{3\sin x}{2+\cos x}$ i zauważyć, że jest ona rosnąca na $(0, \infty)$, ciągła w 0, oraz $f(0) = 0$,

(d) można postąpić analogicznie jak w zadaniu 14b) rozpatrując na przykład funkcję $f(x) = 1 + xe^x - e^x$,

15. **(a)** $y = 0$ to asymptota pozioma lewostronna, $x = 2, x = -2$ to asymptoty pionowe obustronne

(b) $y = 0$ to asymptota pozioma prawostronna, $x = 0$ to asymptota pionowa prawostronna

16. **(a)** $D = (0, 1) \cup (1, \infty)$, $x = 1$ to asymptota pionowa obustronna, f jest rosnąca w przedziałach $(0, 1)$ i (e^2, ∞), f jest malejąca w przedziale $(1, e^2)$, $f_{min}(e^2) = \frac{e^2}{4}$, f jest wypukła w przedziałach $(0, 1)$ i $(1, e^3)$, f jest wklęsła w przedziale (e^3, ∞), punkt przegięcia to $(e^3, \frac{1}{9}e^3)$.

(b) $D = R \setminus \{1\}$, $x = 1$ to asymptota pionowa prawostronna, $y = e$ to asymptota pozioma obustronna, f jest malejąca w przedziałach $(-\infty, 1)$ i $(1, \infty)$, f jest wklęsła w przedziale $(-\infty, \frac{1}{2})$, f jest wypukła w przedziale $(\frac{1}{2}, \infty)$, punkt przegięcia to $(\frac{1}{2}, \frac{1}{e})$.

17. 2. WSKAZÓWKA: zbadać przebieg zmienności funkcji $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 6x^2 + 12x - 20$.

18. **(a)** $m = f(1) = 1;\ M = f(\frac{1}{e}) = e - 1$; **(b)** $m = f(e) = e;\ M = f(e^2) = \frac{e^2}{4}$.