Zadania powtórzeniowe z Analizy 1 - część 3

Zadanie 1. *Obliczyć całki*

(a) $\int (\operatorname{tg} x)^2 dx$, **(b)** $\int (2x-3)^{10} dx$, **(c)** $\int \frac{dx}{2+\sqrt{x}}$, **(d)** $\int \frac{dx}{\cosh x}$,

(e) $\int \sin^5 x \cos x dx$, **(f)** $\int \frac{xdx}{(x^2-1)^{\frac{3}{2}}}$, **(g)** $\int \frac{(\arcsin x)^2 dx}{\sqrt{1-x^2}}$, **(h)** $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}+1}$,

(i) $\int \ln x dx$, **(j)** $\int x \cos x dx$, **(k)** $\int x^2 e^{1-x} dx$, **(l)** $\int 8x^2 e^{4-x^3} dx$.

Zadanie 2. *Obliczyć następujące całki z funkcji wymiernych*

(a) $\int \frac{dx}{x(x+1)^2}$, **(b)** $\int \frac{x^4}{x^4+5x^2+4} dx$, **(c)** $\int \frac{x^3+x+1}{x(x^2+1)} dx$, **(d)** $\int \frac{xdx}{x^3-1}$.

Zadanie 3. *Wyprowadzić wzór rekurencyjny dla całki* $\int \cos^n x dx$.

Zadanie 4. *Obliczyć całki z wyrażeń trygonometrycznych*

(a) $\int \sin^4 x dx$, **(b)** $\int \sin^5 x dx$, **(c)** $\int \sin^4 x \cos^3 x dx$, **(d)** $\int \cos 3x \cos 5x \; dx$,

(e) $\int \frac{dx}{5+4\cos x} dx$, **(f)** $\int \frac{dx}{4\cos x + 3\sin x}$, **(g)** $\int \frac{\cos x dx}{\sin^3 x - \cos^3 x}$, **(h)** $\int \frac{2+\sin x}{\sin x(1+\cos x)} dx$.

Zadanie 5. *Obliczyć całki zawierające pierwiastki*

(a) $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{5-x}+\sqrt{5-x}}$, **(b)** $\int \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}$, **(c)** $\int \frac{3x+1}{\sqrt{x^2-4x+5}} dx$,

(d) $\int x^4 \sqrt{1-x^2} dx$, **(e)** $\int x \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} dx$.

Zadanie 6. *Nie wykonując żadnych rachunków wyznaczyć wartości całek:*

(a) $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin(2x)}{1+\cos^2 x} dx$, **(b)** $\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} (x^3-2x) e^{|x|} dx$.

Zadanie 7. *Obliczyć podane całki niewłaściwe lub wykazać, że są rozbieżne:*

(a) $\int_5^\infty \frac{dx}{(5+x)\sqrt{x}}$, **(b)** $\int_0^\infty \frac{xdx}{(x+2)^3}$, **(c)** $\int_0^1 \frac{1-\ln x}{x^2} dx$, **(d)** $\int_{-\infty}^0 e^{3x} x^2 dx$,

(e) $\int_0^\infty e^{-3x} \sin 2x dx$, **(f)** $\int_6^\infty \frac{dx}{x^4-3x^2-4}$, **(g)** $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}$ **(h)** $\int_{-\infty}^\infty \frac{xdx}{1+x^4}$,

(i) $\int_{-\infty}^\infty \frac{xdx}{1+x^2}$, **(j)** $\int_1^\infty \frac{dx}{x^3+x^2+x}$, **(k)** $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}$ **(l)** $\int_{-3}^0 \ln|x+2| dx$.

Zadanie 8. *Zbadać zbieżność całek niewłaściwych:*

(a) $\int_0^{2\pi} \frac{2+\sin x - 3\cos x}{\sqrt{x}} dx$, **(b)** $\int_{-\infty}^0 \frac{(x-1)^4}{e^{-x^2}+1} dx$, **(c)** $\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt[3]{x^4+8x}}$ **(d)** $\int_0^4 \frac{x-\cos(x^2)}{\sqrt{4-x}} \; dx$

Zadanie 9. *Obliczyć pola obszarów ograniczonych liniami:*

(a) $y = 4x - x^2 \;\; i \;\; x + y = 0$, **(b)** $y = 6\sqrt{x} \;\; i \;\; y = x + 8$,

(c) $y = \frac{8}{x^2(x^2+16)}, \; x = 1, \; x = 3, \; y = 0$, **(d)** $y = \arcsin x, \; x = -1, \; x = 1, \; y = 0$,

(e) $y = \frac{x^2}{2} \;\; i \;\; y = \frac{1}{1+x^2}$.

Zadanie 10. *Obliczyć długości łuków krzywych danych poniższymi funkcjami:*

(a) $y = \sqrt{1-x^2}$ *dla* $0 \le x \le 0,5$, **(b)** $y = \sqrt{x-x^2} + \arcsin\sqrt{x}$ *dla* $x \in [0,1]$,

(c) $y = \ln(1-x^2)$ *dla* $0 \le x \le 0,5$.

Zadanie 11. *Obliczyć objętość bryły powstałej przez obrót dookoła osi OX*

(a) *krzywej* $y = \mathrm{tg} x,\ 0 \le x \le \frac{\pi}{4}$, **(b)** *półokręgu o równaniu* $x^2 + y^2 = 2y,\ 0 \le y \le 1$.

Zadanie 12. *Obliczyć pole powierzchni powstałej przez obrót dookoła osi OX krzywej*

(a) $y = \sqrt{x+2},\ 1 \le x \le 2$, **(b)** $y = \mathrm{tg}\, x,\ 0 \le y \le \frac{\pi}{2}$.

Zadanie 13. *Obliczyć wartość średnią funkcji* $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})^2}$ *na przedziale* $[1, 64]$.

Zadanie 14. *Wykazać, że ciąg o wyrazie ogólnym* $a_n = \displaystyle\int_0^n \frac{\sin^2 x}{1+x^2}dx$ *jest zbieżny.*

Zadanie 15. *Wyznaczyć dziedzinę i obliczyć pochodną funkcji*

$$F(x) = \int_{\frac{x}{2}}^{x^2-1} \mathrm{e}^{\frac{1}{\sqrt{t(t-3)}}}\, dt.$$

Zadanie 16. *Obliczyć pochodną funkcji* $F(x) = \int_0^{2|x|} \sin t^2 dt$.

Zadanie 17. *Narysować wykres funkcji* $F(x) = \int_{-1}^{x} |t-1| dt,\ x \in (-3, 5]$.

ODPOWIEDZI:

1. **(a)** $F(x) = \mathrm{tg}\, x - x + C$
(b) $F(x) = \frac{1}{22}(2x-3)^{11} + C$
(c) $t = \sqrt{x} \Rightarrow \int \frac{2tdt}{t+2} = 2\sqrt{x} - 4\ln(\sqrt{x}+2) + C$
(d) $F(x) = 2\,\mathrm{arctg}\,\mathrm{e}^x + C$
(e) $F(x) = \frac{1}{6}\sin^6 x + C$
(f) $t = x^2 - 1 \Rightarrow F(x) = -\frac{1}{\sqrt{x^2-1}} + C$
(g) $F(x) = \frac{1}{3}(\arcsin x)^3 + C$
(h) $t = \sqrt[3]{x} \Rightarrow \int \frac{3t^2 dt}{t+1} = \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2} - 3\sqrt[3]{x} + 3\ln|\sqrt[3]{x}+1| + C$
(i) $F(x) = x\ln x - x + C$
(j) $F(x) = x\sin x + \cos x + C$
(k) $F(x) = -(x^2+2x+2)e^{1-x} + C$
(l) $F(x) = -\frac{8}{3}e^{4-x^3} + C$

2. **(a)** $F(x) = \ln|x| - \ln|x+1| - \frac{1}{x+1} + C$
(b) $F(x) = x + \frac{1}{3}\,\mathrm{arctg}\, x - \frac{8}{3}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x}{2} + C$
(c) $F(x) = x + \ln|x| - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C$
(d) $F(x) = \frac{1}{6}\ln\frac{(x-1)^2}{x^2+x+1} - \frac{1}{\sqrt{3}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C$

3. $J_n = \int \cos^n x dx = \begin{cases} x + C, & n = 0 \\ \sin x + C, & n = 1 \\ \frac{1}{n}\cos^{n-1} x \sin x + \frac{n-1}{n} J_{n-2}, & n = 2, 3, \ldots \end{cases}$

4. **(a)** $F(x) = \frac{3}{4}x - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{8}\sin 4x + C$
(b) $t = \cos x \Rightarrow F(x) = -\frac{1}{5}\cos^5 x + \frac{2}{3}\cos^3 x - \cos x + C$
(c) $t = \sin x \Rightarrow F(x) = \frac{1}{5}\sin^5 x - \frac{1}{7}\sin^7 x + C$
(d) $F(x) = \frac{1}{16}\sin 8x + \frac{1}{4}\sin 2x + C$
(e) $t = \mathrm{tg}\frac{x}{2} \Rightarrow F(x) = \frac{2}{3}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{1}{3}\,\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}x\right) + C$
(f) $t = \mathrm{tg}\frac{x}{2} \Rightarrow \int \frac{-dt}{(t-2)(2t+1)} = -\frac{1}{5}\ln|\mathrm{tg}\frac{x}{2} - 2| + \frac{1}{5}\ln|2\mathrm{tg}\frac{x}{2} + 1| + C$

(g) $t = \mathrm{tg}x \Rightarrow \int \frac{dt}{t^3-1} = \frac{1}{3}\ln|t-1| - \frac{1}{6}\ln|t^2+t+1| - \frac{\sqrt{3}}{3}\mathrm{arctg}[\frac{2}{\sqrt{3}}(t+\frac{1}{2})] + C$, gdzie $t = \mathrm{tg}x$

(h) $t = \mathrm{tg}\frac{x}{2} \Rightarrow \int \frac{t^2+t+1}{t}dt = \frac{1}{2}\mathrm{tg}^2\frac{x}{2} + \mathrm{tg}\frac{x}{2} + \ln|\mathrm{tg}\frac{x}{2}| + C$

5. **(a)** $t = \sqrt[4]{5-x} \Rightarrow \int \frac{-4t^2dt}{t+1} = -2\sqrt{5-x} + 4\sqrt[4]{5-x} - 4\ln(\sqrt[4]{5-x}+1) + C$
(b) $F(x) = \arcsin(x-1) + C$
(c) $F(x) = 3\sqrt{x^2-4x+5} + 7\ln|x-2+\sqrt{x^2-4x+5}| + C$
(d) $F(x) = (\frac{x^5}{6} - \frac{x^3}{24} - \frac{x}{16})\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{16}\arcsin x + C.$

6. WSKAZÓWKA: Wystarczy zauważyć, że funkcje podcałkowe są nieparzyste.

7. **(a)** $\frac{\pi\sqrt{5}}{10}$ (zastosować podstawienie $t = \sqrt{x}$)
(b) $\frac{1}{4}$
(c) całka rozbieżna ($\lim_{\alpha\to 0^+}\left[\frac{1}{x}\ln x\right]_\alpha^1 = \infty$)
(d) $\lim_{T\to-\infty}\left[(\frac{1}{3}T^2 - \frac{2}{9}T + \frac{2}{27})e^{3T}\right]_T^0 = \frac{2}{27}$
(e) $\lim_{T\to\infty}\left[\frac{-e^{-3T}(2\cos 2T + 3\sin 2T)}{13}\right]_0^T = \frac{2}{13}$
(f) $\lim_{T\to\infty}\left[\frac{1}{20}\ln|\frac{T-2}{T+2}| - \frac{1}{5}\mathrm{arctg}T\right]_6^T = -\frac{\pi}{10} + \frac{1}{20}\ln 2 + \frac{1}{5}\mathrm{arctg}6$
(g) π
(h) 0 (zastosować podstawienie: $t = x^2$)
(i) całka rozbieżna
(j) $\lim_{T\to\infty}\left[\ln\frac{T}{\sqrt{T^2+T+1}} - \frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{arctg}\frac{2T+1}{\sqrt{3}}\right]_1^T = \ln\sqrt{3} - \frac{\pi}{6\sqrt{3}}$
(k) Całka rozbieżna, ponieważ $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}} = \int_{-1}^{-1/2}\frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}} + \int_{-1/2}^0 \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}} + \int_0^{1/2}\frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}} + \int_{1/2}^1 \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}$
i np. całka $\int_0^{1/2}\frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}$ jest rozbieżna, co wynika z kryterium porównawczego:
$\forall_{x\in(0,\frac{1}{2}]}\ \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}} \geq \frac{1}{x} > 0$ oraz $\int_0^{1/2}\frac{dx}{x} = \infty$
(l) $1 - \ln 4$.

8. **(a)** zbieżna bezwzględnie **(b)** rozbieżna **(c)** zbieżna **(d)** zbieżna bezwzględnie

9. **(a)** $\frac{125}{6}$ **(b)** 8 **(c)** $\frac{1}{3} - \frac{1}{8}(\mathrm{arctg}\frac{3}{4} - \mathrm{arctg}\frac{1}{4})$ **(d)** $\pi - 2$ **(e)** $\frac{\pi}{2} - \frac{1}{3}$

10. **(a)** $\int_0^{1/2}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{6}$ **(b)** $\int_0^1\sqrt{1+\left(\frac{1-x}{\sqrt{x-x^2}}\right)^2}dx = \int_0^1\frac{1}{\sqrt{x}}dx = 2$ **(c)** $\int_0^{1/2}\frac{1+x^2}{1-x^2}dx = \ln 3 - \frac{1}{2}$

11. **(a)** $\pi(1-\frac{\pi}{4})$ **(b)** $\frac{10\pi}{3} - \pi^2$

12. **(a)** $\frac{1}{6}\pi(17\sqrt{17} - 13\sqrt{13})$ **(b)** $\pi(\sqrt{2} + \ln(1+\sqrt{2}))$.

13. $\frac{1}{21}(\mathrm{arctg}\,2 - \frac{3}{10} - \frac{\pi}{4})$.

14. WSKAZÓWKA: zastosować twierdzenie o ciągu monotonicznym i ograniczonym.

15. $D_F = (-1,0)\cup(6,\infty)$; $F'(x) = 2x\exp\left(\frac{1}{\sqrt{(x^2-1)(x^2-4)}}\right) - \frac{1}{2}\exp\left(\frac{2}{\sqrt{x(x-6)}}\right)$.

16. $F(x) = \begin{cases} -2\sin 4x^2, & x<0 \\ 0, & x=0 \\ 2\sin 4x^2, & x>0 \end{cases}$. WSKAZÓWKA: $F'(0)$ obliczyć z definicji stosując regułę de l'Hospitala.

17. WSKAZÓWKA: Pokazać, że $F(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{3}{2}, & x\in(-3,1] \\ \frac{1}{2}x^2 - x + \frac{5}{2}, & x\in(1,5] \end{cases}$.