Zadania powtórzeniowe z Analizy 1 - część 4

Zadanie 1. *Obliczyć granice lub wykazać, że nie istnieją:*

(a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{3xy^5}{2x^2+4y^2}$ **(b)** $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2}{x^4+y^4}$ **(c)** $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2-y^2}{x}$

(d) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)} \dfrac{x+2y-1}{x^2+4y^2-1}$ **(e)** $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (2x+y)\sin\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$ **(f)** $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3-y^3}{x^2+y^2}.$

Zadanie 2. *Zbadać ciągłość funkcji:*

(a) $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2+2y^4} & dla \quad (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & dla \quad (x,y)=(0,0) \end{cases}$ **(b)** $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^3-y^3} & dla \quad x\neq y \\ 0 & dla \quad x=y \end{cases}$

(c) $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{(x^2+y^2)\cos x}{|x|+|y|} & dla \quad (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & dla \quad (x,y)=(0,0). \end{cases}$

Zadanie 3. *Czy uda się dobrać stałe a, $b\in\mathbb{R}$ tak aby poniższe funkcje był ciągłe w swoich dziedzinach? Jeśli tak, to wyznaczyć te stałe.*

(a) $f(x,y)=\begin{cases} \pi+\dfrac{\operatorname{tg}(xy)}{x} & dla \quad (x,y)\in\left[(-\frac{\pi}{2},0)\cup(0,\frac{\pi}{2})\right]\times(-1,1) \\ a+y & dla \quad x=0 \ \ i \ \ y\in(-1,1) \end{cases}$

(b) $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^2y^2+2x^2+2y^2}{x^2+y^2} & dla \quad (x,y)\neq(0,0) \\ b & dla \quad (x,y)=(0,0). \end{cases}$

Zadanie 4. *Obliczyć pochodne cząstkowe funkcji.*

(a) $f(x,y,z)=\sin x^2\cdot\arcsin y-e^{\sin z}\cdot\cos^2 x+3\operatorname{arctg}(x^2y)$ *dla* $(x,y,z)\in\mathbb{R}\times(-1,1)\times\mathbb{R}$

(b) $f(x,y)=x^{\frac{2}{y}}-\log_{10}(xy^2)$ *dla* $x>0$ *i* $y\neq0$

(c) $f(x,y,z)=1-\sqrt[5]{2+5\operatorname{arctg}(e^{xy}+\sin z)}$ *dla* $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$

(d) $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{\sin(x^2y)}{x^2+y^2} & dla \quad (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & dla \quad (x,y)=(0,0) \end{cases}$

(e) $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^2-3y^2}{x-y} & dla \quad x\neq y \\ 0 & dla \quad x=y \end{cases}$

(f) $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^3-y+1}{\sqrt{x^2+(y-1)^2}} & dla \quad (x,y)\neq(0,1) \\ 0 & dla \quad (x,y)=(0,1). \end{cases}$

Zadanie 5. *Obliczyć pochodne cząstkowe $f_x(0,0)$ oraz $f_y(0,0)$ jeśli*

$$f(x,y)=\begin{cases} (x^2-2y)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2} & dla \quad (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & dla \quad (x,y)=(0,0). \end{cases}$$

Zadanie 6. *Dana jest funkcja* $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{\sin(xy^3)}{\sqrt{x^2+y^2}} & dla \quad (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & dla \quad (x,y)=(0,0). \end{cases}$

(a) *Wyznaczyć pochodną kierunkową w punkcie $(1,0)$ w kierunku wektora $[h_x,h_y]$.*

(b) *Zbadać różniczkowalność funkcji $f(x,y)$.*

Zadanie 7. *Zbadać różniczkowalność następujących funkcji.*

$$\textbf{(a)}\quad f(x,y)=\sqrt[3]{xy} \qquad\qquad \textbf{(b)}\quad f(x,y)=\begin{cases} x+\dfrac{x^3+y^3}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{dla}\quad (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{dla}\quad (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

Zadanie 8. *Wykazać, że powierzchnia o równaniu* $z = x\arcsin\frac{y}{x+y}$ *posiada płaszczyznę styczną w punkcie* $(1,1,z_0)$. *Napisać równanie tej płaszczyzny.*

Zadanie 9. *Wyznaczyć pochodne cząstkowe rzędu drugiego następujących funkcji.*

$$\textbf{(a)}\quad f(x,y)=\sqrt{5x^4+y^8} \qquad\qquad \textbf{(b)}\quad f(x,y)=\operatorname{arctg}\frac{y^2}{x}\quad \text{dla}\ \ x\neq 0.$$

Zadanie 10. *Niech* $f:\mathbb{R}^2\mapsto\mathbb{R}$ *ma ciągłe pochodne cząstkowe* f_x *oraz* f_y. *Obliczyć*

(a) $g(t)$ *jeśli* $g=f(x,y)$ *oraz* $x=t\ln(1+t^2)$, $y=e^{-t}$

(b) *pochodne cząstkowe funkcji* $h(s,w)$ *jeśli* $h=f(x,y)$, $x=e^s\cos w$, $y=e^s\sin w$

(c) *pochodne cząstkowe funkcji* $z(r,p)=f(r-3p,2r+5p)$.

Zadanie 11. *Niech* $z=f(x,y)$. *Przekształcić wyrażenie*

$$x\,\frac{\partial z}{\partial x}+\sqrt{1+y^2}\,\frac{\partial z}{\partial y}$$

wprowadzając nowe zmienne niezależne u *i* v, *przy czym* $x=e^u$ *oraz* $y=\operatorname{sh}v$.

Zadanie 12. *Sprawdzić, czy zachodzi równość*

$$\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{v-u}{u^2+v^2}$$

jeżeli $z=f(x,y)=\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$, *przy czym* $x=u+v$ *oraz* $y=u-v$.

Zadanie 13. *Wyznaczyć ekstrema lokalne funkcji*

(a) $f(x,y)=e^{3x-2y}(3x^2-y^2)$ **(b)** $f(x,y)=y^2+3x^2y-x^3y$

(c) $f(x,y)=-8x^3+y^3-24xy-4$ **(d)** $z=24xy-2x^2y-4xy^2$

(e) $f(x,y)=3x^8+3y^8+8x^3y^3$.

Zadanie 14. *Znaleźć najmniejszą i największą wartość funkcji*

(a) $f(x,y)=x^2+y^2-2y$ *w kole* $x^2+y^2\le 4$

(b) $g(x,y)=x^2+y^2-xy-2x+y-10$ *na zbiorze* $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : |x|+|y|\leqslant 2\wedge x\geqslant 0\}$

ODPOWIEDZI:

1. (a) 0, WSKAZÓWKA: $0\le\left|\frac{3xy^5}{2x^2+4y^2}\right|\le\frac{|3xy^5|}{y^2}=3|xy^3|$

(b) nie istnieje: $(x_n,y_n)=(0,\frac{1}{n})\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}(0,0)$ i $\frac{x_n^2}{x_n^4+y_n^4}=0\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}0$

$(\tilde{x}_n,\tilde{y}_n)=(\frac{1}{n},\frac{1}{n})\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}(0,0)$ i $\frac{\tilde{x}_n^2}{\tilde{x}_n^4+\tilde{y}_n^4}=\frac{1}{2}n^2\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}\infty$

(c) nie istnieje: $(x_n,y_n)=(\frac{1}{n},\frac{1}{n})\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}(0,0)$ i $\frac{x_n^2-y_n^2}{x_n}=0\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}0$

$(\tilde{x}_n,\tilde{y}_n)=(\frac{1}{n^2},\frac{1}{n})\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}(0,0)$ i $\frac{\tilde{x}_n^2-\tilde{y}_n^2}{\tilde{x}_n}=\frac{1}{n^2}-1\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}-1$

(d) nie istnieje: $(x_n,y_n)=(1,\pm\frac{1}{n})\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}(1,0)$ i $\frac{x_n+2y_n-1}{x_n^2+4y_n^2-1}=\pm\frac{1}{2}n\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}\pm\infty$

(e) 0, WSKAZÓWKA: $0\le\left|(2x+y)\sin\frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|\le|2x+y|$ (f) 0, $0\le\left|\frac{x^3-y^3}{x^2+y^2}\right|\le\left|\frac{x^3}{x^2+y^2}\right|+\left|\frac{y^3}{x^2+y^2}\right|\le|x|+|y|$

2. (a) Funkcja jest ciągła na $\mathbb{R}^2$, WSKAZÓWKA: $0\le\left|\frac{x^3}{x^2+2y^4}\right|\le\left|\frac{x^3}{x^2}\right|=|x|$

(b) Funkcja jest ciągła jedynie na $\mathbb{R}^2-\{(x,y):x=y\}$. Nie jest ciągła w punkcie $(0,0)$, bo nie istnieje

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$, ponieważ $(x_n,y_n)=(\frac{1}{n},0)\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}(0,0)$ i $f(x_n,y_n)=0\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}0$ oraz $(\tilde{x}_n,\tilde{y}_n)=(\frac{1}{n},\frac{1}{n+1})\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}(0,0)$ i $f(\tilde{x}_n,\tilde{y}_n)=\frac{n(n+1)}{3n^2+3n+1}\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}\frac{1}{3}$.
Nie jest ciągła w żadnym punkcie (x_0,x_0), gdzie $x_0\neq 0$, bo nie istnieje skończona granica $\lim_{(x,y)\to(x_0,x_0)} f(x,y)$: $(x_n,y_n)=(x_0,x_0+\frac{1}{n})\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}(x_0,x_0)$ i $f(x_n,y_n)=\frac{nx_0^4+3x_0^3+\frac{1}{n}x_0^2}{-3x_0^2-3x_0\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}}\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}-\infty$

(c) Funkcja jest ciągła na $\mathbb{R}^2$, WSKAZÓWKA: $0\leq|\frac{(x^2+y^2)\cos x}{|x|+|y|}|\leq\frac{x^2+y^2}{|x|+|y|}=\frac{x^2}{|x|+|y|}+\frac{y^2}{|x|+|y|}\leq\frac{x^2}{|x|}+\frac{y^2}{|y|}=|x|+|y|$

3. (a) Tak, $a=\pi$, bo $\lim_{(x,y)\to(0,y_0)} f(x,y)=\pi+\lim_{(x,y)\to(0,y_0)}\frac{\sin(xy)}{xy}y\frac{1}{\cos(xy)}=\pi+1\cdot y_0\cdot 1=\pi+y_0=f(0,y_0)=$ $=a+y_0$. (b) Tak, $b=2$, bo $2\leq\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}+2\leq\frac{x^2y^2}{x^2}+2=y^2+2$.

4. (a) $f_x(x,y,z)=2x\cos x^2\arcsin y+e^{\sin z}\sin 2x+\frac{6xy}{1+x^4y^2}$, $f_y(x,y,z)=\frac{\sin x^2}{\sqrt{1-y^2}}+\frac{3x^2}{1+x^4y^2}$, $f_z(x,y,z)=-\cos^2 x\cos z e^{\sin z}$

(b) $f_x(x,y)=\frac{2}{y}x^{\frac{2}{y}-1}-\frac{1}{x\ln 10}$, $f_y(x,y)=\frac{-2\ln x}{y^2}x^{\frac{2}{y}}-\frac{2}{y\ln 10}$, WSKAZÓWKA: $f(x,y)=e^{\frac{2}{y}\ln x}-\frac{\ln(xy^2)}{\ln 10}$

(c) $f_x(x,y)=\frac{-ye^{xy}}{[1+(e^{xy}+\sin z)^2]\sqrt[5]{[2+5\operatorname{arctg}(e^{xy}+\sin z)]^4}}$, $f_y(x,y)=\frac{-xe^{xy}}{[1+(e^{xy}+\sin z)^2]\sqrt[5]{[2+5\operatorname{arctg}(e^{xy}+\sin z)]^4}}$,

$f_z(x,y)=\frac{-\cos z}{[1+(e^{xy}+\sin z)^2]\sqrt[5]{[2+5\operatorname{arctg}(e^{xy}+\sin z)]^4}}$

(d) $f_x(x,y)=\begin{cases}\frac{2x[y(x^2+y^2)\cos(x^2y)-\sin(x^2y)]}{(x^2+y^2)^2} & \text{dla}\quad (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{dla}\quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$

$f_y(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2(x^2+y^2)\cos(x^2y)-2y\sin(x^2y)}{(x^2+y^2)^2} & \text{dla}\quad (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{dla}\quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$

(e) $f_x(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2+3y^2-2xy}{(x-y)^2} & \text{dla}\quad x\neq y\\ 1 & \text{dla}\quad x=y=0\\ \text{nie istnieje} & \text{dla}\quad x=y\neq 0\end{cases}$, $f_y(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2+3y^2-6xy}{(x-y)^2} & \text{dla}\quad x\neq y\\ 3 & \text{dla}\quad x=y=0\\ \text{nie istnieje} & \text{dla}\quad x=y\neq 0\end{cases}$

(f) $f_x(x,y)=\begin{cases}\frac{2x^4+3x^2(y-1)^2+x(y-1)}{[x^2+(y-1)^2]^{3/2}} & \text{dla}\quad (x,y)\neq(0,1)\\ 0 & \text{dla}\quad (x,y)=(0,1)\end{cases}$, $f_y(x,y)=\begin{cases}\frac{-x^2-x^3(y-1)}{[x^2+(y-1)^2]^{3/2}} & \text{dla}\quad (x,y)\neq(0,1)\\ \text{nie istnieje} & \text{dla}\quad (x,y)=(0,1)\end{cases}$

5. $f_x(0,0)=0$, $f_y(0,0)$ nie istnieje

6. (a) $f_{(h_x,h_y)}(1,0)=0$

(b) Funkcja f jest różniczkowalna na $\mathbb{R}^2$. Jej różniczkowalność poza punktem $(0,0)$ wynika stąd, że poza punktem $(0,0)$ ma ciągłe pochodne cząstkowe. Natomiast w punkcie $(0,0)$ jest różniczkowalna, ponieważ $\lim_{(h_x,h_y)\to(0,0)}\frac{f(h_x,h_y)-f(0,0)-f_x(0,0)h_x-f_y(0,0)h_y}{\sqrt{h_x^2+h_y^2}}=\lim_{(h_x,h_y)\to(0,0)}\frac{\sin(h_xh_y^3)}{h_x^2+h_y^2}=\lim_{(h_x,h_y)\to(0,0)}\frac{\sin(h_xh_y^3)}{h_xh_y^3}\frac{h_xh_y^3}{h_x^2+h_y^2}=$ $=0$, bo $\frac{\sin(h_xh_y^3)}{h_xh_y^3}\to 1$ i $|\frac{h_xh_y^3}{h_x^2+h_y^2}|\leq|\frac{h_xh_y^3}{h_y^2}|=|h_xh_y|$ oraz $|h_xh_y|\to 0$.

7. (a) $f_x(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{y}{x^2}} & \text{dla}\quad xy\neq 0\\ 0 & \text{dla}\quad (x,y)=(x,0)\\ \text{nie istnieje} & \text{dla}\quad (x,y)=(0,y)\text{ i }y\neq 0\end{cases}$ $\quad f_y(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{x}{y^2}} & \text{dla}\quad xy\neq 0\\ 0 & \text{dla}\quad (x,y)=(0,y)\\ \text{nie istnieje} & \text{dla}\quad (x,y)=(x,0)\text{ i }x\neq 0\end{cases}$

Funkcja ta jest różniczkowalna w każdym punkcie postaci (x,y), gdzie $xy\neq 0$, bo pochodne cząstkowe są ciągłe w takim punkcie. Funkcja nie jest różniczkowalna w punktach postaci $(x,0)$ i $(0,y)$, gdzie $x\neq 0$ i $y\neq 0$, bo w tych punktach nie istnieje jedna z pochodnych cząstkowych. Funkcja nie jest różniczkowalna w punkcie $(0,0)$, bo nie istnieje granica $\lim_{(h_x,h_y)\to(0,0)}\frac{f(h_x,h_y)-f(0,0)-f_x(0,0)h_x-f_y(0,0)h_y}{\sqrt{h_x^2+h_y^2}}=\lim_{(h_x,h_y)\to(0,0)}\frac{\sqrt[3]{h_xh_y}}{\sqrt{h_x^2+h_y^2}}$. Aby pokazać, że powyższa granica nie istnieje można rozpatrzyć ciągi $(\frac{1}{n},0)$ oraz $(\frac{1}{n},\frac{1}{n})$.

(b) Funkcja ta jest różniczkowalna na $\mathbb{R}^2$. Wyjaśnienie:

$f_x(x,y)=\begin{cases}1+\frac{2x^4+3x^2y^2-xy^3}{(x^2+y^2)^{3/2}} & \text{dla}\quad (x,y)\neq(0,0)\\ 1 & \text{dla}\quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$, $f_y(x,y)=\begin{cases}\frac{2y^4+3x^2y^2-x^3y}{(x^2+y^2)^{3/2}} & \text{dla}\quad (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{dla}\quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$

Funkcja ta jest różniczkowalna poza punktem $(0,0)$, bo ma tam ciągłe pochodne cząstkowe. Funkcja jest różniczkowalna w punkcie $(0,0)$, ponieważ $\lim_{(h_x,h_y)\to(0,0)}\frac{f(h_x,h_y)-f(0,0)-f_x(0,0)h_x-f_y(0,0)h_y}{\sqrt{h_x^2+h_y^2}}=\lim_{(h_x,h_y)\to(0,0)}\frac{h_x^3+h_y^3}{h_x^2+h_y^2}=\lim_{(h_x,h_y)\to(0,0)}[\frac{h_x^3}{h_x^2+h_y^2}+\frac{h_y^3}{h_x^2+h_y^2}]=0$, bo $|\frac{h_x^3}{h_x^2+h_y^2}+\frac{h_y^3}{h_x^2+h_y^2}|\leq|\frac{h_x^3}{h_x^2+h_y^2}|+|\frac{h_y^3}{h_x^2+h_y^2}|\leq|\frac{h_x^3}{h_x^2}|+|\frac{h_y^3}{h_y^2}|=|h_x|+|h_y|\to 0$.

8. Funkcja $f(x,y)=x\arcsin\frac{y}{x+y}$ jest różniczkowalna w punkcie $(1,1)$, bo ma w tym punkcie ciągłe pochodne cząstkowe: $f_x(x,y)=\arcsin\frac{y}{x+y}-\frac{xy}{(x+y)^2\sqrt{1-(\frac{y}{x+y})^2}}$, $f_y(x,y)==\frac{x^2}{(x+y)^2\sqrt{1-(\frac{y}{x+y})^2}}$. Różniczkowalność funkcji f

w punkcie $(1,1)$ oznacza, że istnieje płaszczyzna styczna do wykresu tej funkcji w punkcie $(1,1,\frac{\pi}{6})$. Równanie szukanej płaszczyzny stycznej: $(\sqrt{3}-\pi)x-\sqrt{3}y+6z=0$.

9. (a) $f_{xx}(x,y)=\begin{cases}\frac{50x^6+30x^2y^8}{(5x^4+y^8)^{3/2}} & \text{dla} \quad (x,y)\neq(0,0)\\ 2\sqrt{5} & \text{dla} \quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$, $f_{yy}(x,y)=\begin{cases}\frac{140x^4y^6+12y^{14}}{(5x^4+y^8)^{3/2}} & \text{dla} \quad (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{dla} \quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$

$f_{xy}(x,y)=f_{yx}(x,y)=\begin{cases}\frac{-40x^3y^7}{(5x^4+y^8)^{3/2}} & \text{dla} \quad (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{dla} \quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$

(b) $f_{xx}=\frac{2xy^2}{(x^2+y^4)^2}$, $f_{yy}=\frac{2x^3-6xy^4}{(x^2+y^4)^2}$, $f_{xy}=f_{yx}=\frac{2y^5-2x^2y}{(x^2+y^4)^2}$,

10. (a) $\frac{dg}{dt}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}=f_x\cdot[\ln(1+t^2)+\frac{2t^2}{1+t^2}]-f_y\cdot e^{-t}$

(b) $\frac{\partial h}{\partial s}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}=f_x\cdot e^s\cos w+f_y\cdot e^s\sin w$, $\frac{\partial h}{\partial w}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial w}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial w}=-f_x\cdot e^s\sin w+f_y\cdot e^s\cos w$

(c) $\frac{\partial z}{\partial r}=f_x+2f_y$, $\frac{\partial z}{\partial p}=-3f_x+5f_y$

11. $\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v}$.

12. Tak

13. (a) $(0,0)$ - brak ekstremum, $f_{min}(2,4)=-\frac{4}{e^2}$,

(b) $(3,0)$ - brak ekstremum, $f_{min}(2,-2)=-4$,

$(0,0)$ - brak ekstremum, bo $f(0,\frac{1}{n})=\frac{1}{n^2}>f(0,0)=0$ i $f(\frac{1}{\sqrt{n}},\frac{-1}{n})=\frac{-1}{n^2}(2-\frac{1}{\sqrt{n}})<f(0,0)=0$

(c) $(0,0)$ - brak ekstremum, $f_{max}(2,-4)=60$ (d) $(0,0),(12,0),(0,6)$ - brak ekstremów, $z_{max}(4,2)=64$

(e) $f_{min}(1,-1)=f_{min}(-1,1)=-2$,

$(0,0)$ - brak ekstremum, bo $f(0,\frac{1}{n})=\frac{3}{n^8}>f(0,0)=0$ i $f(\frac{1}{n},\frac{-1}{n})=\frac{2}{n^6}(\frac{3}{n^2}-4)<f(0,0)=0$

14. (a) wartość największa: $f(0,-2)=8$, wartość najmniejsza$f(0,1)=-1$ (b) wartość największa: $g(0,2)=-4$, wartość najmniejsza: $g(\frac{3}{2},-\frac{1}{2})=-10\frac{3}{4}$.