Imię i nazwisko.. grupa............

MEiL, Analiza 1 - egzamin - 07.02.20 - Temat 1

Zadanie 1.

a) Wyznaczyć przedziały monotoniczności i ekstrema funkcji $f(x) = 3x - \sqrt{x^2 - 9}$.

b) Obliczyć granicę

$$\lim_{x \to 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e}{x}.$$

Zadanie 2. Obliczyć długość krzywej będącej wykresem funkcji $f(x) = x^2$ dla $x \in [0, 2]$.

Zadanie 3. Dana jest funkcja:

$$f(x,y) = \begin{cases} x + 4y - \dfrac{xy^2}{x^2+y^2} & \text{dla } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{dla } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

a) Zbadać ciągłość funkcji f w punkcie $(0,0)$.

b) Zbadać różniczkowalność funkcji f w punkcie $(0,0)$.

Zadanie 4. Korzystając z definicji zbadać zbieżność całki niewłaściwej

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin x(\cos x + 1)}.$$

Zadanie 5.

a) Wyznaczyć ekstrema lokalne funkcji $f(x,y) = 4x^2 + y^2 - 2x^2y + 4y - 2020$.

b) Wyznaczyć równanie płaszczyzny stycznej do wykresu funkcji $f(x,y) = \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)$ w punkcie $\left(\sqrt{3}, 1, f(\sqrt{3}, 1)\right)$.

Imię i nazwisko.. grupa...............

MEiL, Analiza 1 - egzamin - 07.02.20 - Temat 2

Zadanie 1.

a) Wyznaczyć przedziały monotoniczności i ekstrema funkcji $f(x) = \sqrt{x^2-4} - 2x$.

b) Obliczyć granicę
$$\lim_{x\to 0} \frac{(1-x)^{\frac{1}{x}} - \frac{1}{e}}{x}.$$

Zadanie 2. Obliczyć objętość bryły powstałej z obrotu dookoła osi OX wykresu funkcji
$$y = \sqrt[4]{\frac{x}{1-x}} \qquad \text{dla } x \in \left[0, \tfrac{1}{2}\right].$$

Zadanie 3. Dana jest funkcja:
$$f(x,y) = \begin{cases} 2x - 3y + \dfrac{x^2 y}{x^2+y^2} & \text{dla } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{dla } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

a) Zbadać ciągłość funkcji f w punkcie $(0,0)$.

b) Zbadać różniczkowalność funkcji f w punkcie $(0,0)$.

Zadanie 4. Korzystając z definicji zbadać zbieżność całki niewłaściwej
$$\int_0^\infty \frac{x-9}{(x+2)(x+1)^2}\, dx.$$

Zadanie 5.

a) Wyznaczyć ekstrema lokalne funkcji $f(x,y) = x^2 + 6y^2 - 2xy^2 + 4x + 2019$.

b) Wyznaczyć równanie płaszczyzny stycznej do wykresu funkcji $f(x,y) = \arccos\left(\dfrac{x}{y}\right)$ w punkcie $\left(\sqrt{3}, 2, f(\sqrt{3}, 2)\right)$.