MEiL, Analiza I - egzamin - 01.02.19

Zadanie 1. Dana jest funkcja $f(x) = 3 - x^{-2x}$.

a) Wyznaczyć wszystkie asymptoty wykresu funkcji f.

b) Wyznaczyć przedziały monotoniczności i ekstrema funkcji f.

Zadanie 2. Obliczyć wartość średnią funkcji

$$f(x) = \frac{2x^2 + x}{\sqrt{3 + 2x - x^2}}$$

na przedziale $[0, 2]$.

Zadanie 3. Dana jest funkcja:

$$f(x,y) = \begin{cases} 2 + 3y\ln(x^2 + y^2) & \text{dla } (x,y) \neq (0,0) \\ 2 & \text{dla } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

a) Obliczyć pochodne cząstkowe funkcji f we wszystkich punktach, w których istnieją.

b) Czy f_x jest ciągła? Odpowiedź uzasadnić.

Zadanie 4. Korzystając z definicji zbadać zbieżność całki niewłaściwej

$$\int_0^{\infty} \frac{\ln^2(x+1)}{(x+1)^2}\, dx.$$

Zadanie 5.

a) Wyznaczyć ekstrema lokalne funkcji $f(x,y) = x^3 - 8y^3 - 24xy - 2$.

b) Podać definicję pochodnej kierunkowej funkcji f w punkcie $(-1, 4)$ w kierunku wektora $\vec{w} = [6, -8]$.

MEiL, Analiza I - egzamin - 01.02.19

Zadanie 1. Dana jest funkcja $f(x) = 1 + (-x)^{3x}$.

a) Wyznaczyć wszystkie asymptoty wykresu funkcji f.

b) Wyznaczyć przedziały monotoniczności i ekstrema funkcji f.

Zadanie 2. Obliczyć objętość bryły powstałej z obrotu dookoła osi OX wykresu funkcji

$$y = \sqrt{\ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)} \qquad \text{dla } x \in [0,1].$$

Zadanie 3. Dana jest funkcja:

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 + x^2\ln(x^2+y^2) & \text{dla } (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & \text{dla } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

a) Obliczyć pochodne cząstkowe funkcji f we wszystkich punktach, w których istnieją.

b) Czy f_y jest ciągła? Odpowiedź uzasadnić.

Zadanie 4. Korzystając z definicji zbadać zbieżność całki niewłaściwej

$$\int_0^1 \frac{1}{x}\sqrt{\frac{x}{1-x}}\,dx.$$

Zadanie 5.

a) Wyznaczyć ekstrema lokalne funkcji $f(x,y) = 2x^3 + 4x^2 + y^2 - 2xy + 3$.

b) Podać definicję pochodnej kierunkowej funkcji f w punkcie $(-2,3)$ w kierunku wektora $\vec{w} = [-3,4]$.

MEiL, Analiza I - egzamin - 08.02.19

Zadanie 1. Obliczyć granice:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n^2-3n+2}{2n^2-3n+4}\right)^{5n^2-n}$

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2}{\pi}\operatorname{arctg} x\right)^{x}$

Zadanie 2. Dana jest funkcja:

$$f(x,y)=\begin{cases} 1+\dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{dla } (x,y)\neq(0,0) \\ 1 & \text{dla } (x,y)=(0,0). \end{cases}$$

a) Obliczyć pochodne cząstkowe funkcji f w punkcie $(0,0)$.

b) Czy funkcja f jest ciągła w punkcie $(0,0)$? Odpowiedź uzasadnić.

c) Wyznaczyć punkty, w których f jest różniczkowalna.

Zadanie 3. Obliczyć długość krzywej $y=1-\ln(\cos x)$ dla $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{3}\right]$.

Zadanie 4. Obliczyć całkę lub wykazać, że jest rozbieżna

$$\int_{-\infty}^{-1}(\pi-\operatorname{arcctg} x)dx.$$

Zadanie 5. Przekształcić wyrażenie

$$y\,\frac{\partial z}{\partial y}+\sqrt{1+x^2}\,\frac{\partial z}{\partial x}$$

wprowadzając nowe zmienne niezależne u i v, przy czym $y=e^u$ oraz $x=\sinh v$.

MEiL, Analiza I - egzamin poprawkowy - 15.03.19

Zadanie 1. Obliczyć granice:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^4+n^2}}+\dfrac{2}{\sqrt{n^4+2n^2}}+\ldots+\dfrac{n}{\sqrt{n^4+n\cdot n^2}}\right)$

b) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\frac{15}{2+3\ln x}}$

Zadanie 2.

a) Wyznaczyć wszystkie asymptoty wykresu funkcji określonej wzorem

$$f(x)=3x+\arccos\left(1-\frac{1}{|x|}\right).$$

b) Wyznaczyć a, tak żeby funkcja

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\operatorname{arctg}(x+2)}{4x+8} & \text{dla} \quad x\neq -2\\ a & \text{dla} \quad x=-2\end{cases}$$

była ciągła w w punkcie $x_0=-2$. Korzystając z definicji, zbadać różniczkowalność funkcji f w tym punkcie.

Zadanie 3. Obliczyć pole obszaru ograniczonego wykresem funkcji

$$f(x)=\frac{1}{4-x}\sqrt{\frac{x}{4-x}},$$

osią OX oraz prostymi $x=0$ i $x=3$.

Zadanie 4. Obliczyć całkę lub wykazać, że jest rozbieżna

$$\int_2^\infty \frac{x+4}{x^3+4x}dx.$$

Zadanie 5.
a) Wyznaczyć ekstrema lokalne funkcji

$$f(x,y)=2x^3+xy^2+5x^2+y^2.$$

b) Napisać równanie płaszczyzny stycznej do wykresu funkcji f w punkcie $((1,3),f((1,3))$.