

1. Wyznacz funkcję odwrotną do funkcji $f(x)$ oraz podaj dziedzinę i zbiór wartości każdej z nich, jeśli:

(a) $f(x) = \frac{1}{2^x+4}$,

(b) $f(x) = \frac{3 \cdot 2^x + 2}{2^x + 1}$.

2. Naszkicuj wykres funkcji $f(x)$ oraz funkcji do niej odwrotnej $f^{-1}(x)$, podaj dziedzinę i zbiór wartości funkcji $f^{-1}(x)$, jeśli:

(a) $f(x) = 2^x$, $x \in \mathbb{R}$,

(b) $f(x) = \log_2(x)$, $x \in \mathbb{R}_+$,

(c) $f(x) = \sin x$, $x \in [2\pi; \frac{5}{2}\pi]$,

(d) $f(x) = \cos x$, $x \in [-3\pi; -2\pi]$.

3. Oblicz wartość wyrażenia:

(a) $\arccos\left(\sin\left(\frac{32}{5}\pi\right)\right)$,

(b) $\arcsin\left(\cos\left(-\frac{7}{11}\pi\right)\right)$.

4. Wyznacz funkcje odwrotne do funkcji hiperbolicznych:

(a) $\text{sh} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

(b) $\text{th} : \mathbb{R} \rightarrow (-1; 1)$.

5. Wykaż, że dla $x \in \mathbb{R}$ zachodzą równości:

(a) $\text{ch}^2 x - \text{sh}^2 x = 1$,

(b) $\text{ch} 2x = \text{ch}^2 x + \text{sh}^2 x$,

(c) $\text{sh} 2x = 2 \text{sh} x \text{ch} x$.

6. Oblicz granicę ciągu:

(a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^n + 5^n}{2^{2n+1} + 5^{n+1}}$,

(b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2^n + 7^n + n + 1}$,

(c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n}}{1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{3^n}}$,

(d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 + 5} - n}{\sqrt{n^2 + 2} - n}$,

(e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{3^n + 4^n}{4^n + 5^n}}$,

(f) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n + 1}$,

- (g) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{n-1} + (-2)^n}{3^{n+1} + (-2)^{n+2}}$,
- (h) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2} \cdot 4^n + n \cdot 3^n + 5n^3}$,
- (i) $\lim_{n \rightarrow \infty} (n - \sqrt{n^2 + n})$,
- (j) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\binom{n+2}{n}}{1 + 2 + 3 + \dots + n}$.