ANL1

Z_3

1. Zbadaj ciągłość funkcji $f(x)$ w każdym punkcie należącym do jej dziedziny. W przypadku punktu nieciągłości określ jego rodzaj.

   (a) $f(x) = \begin{cases} \operatorname{arcctg}\left(\frac{1}{x}\right) & \text{dla} \quad x \neq 0, \\ 0 & \text{dla} \quad x = 0. \end{cases}$

   (b) $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{\sin x} & \text{dla} \quad x \in (-\pi;\ 0) \cup (0;\ \pi) \cup (\pi;\ 2\pi), \\ 0 & \text{dla} \quad x \in \{0,\ \pi\}. \end{cases}$

   (c) $f(x) = \begin{cases} (1-x)\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{1-x^2}\right) & \text{dla} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{-1,\ 1\}, \\ 1 & \text{dla} \quad x = -1, \\ 0 & \text{dla} \quad x = 1. \end{cases}$

   (d) $f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x}} & \text{dla} \quad x \neq 0, \\ 0 & \text{dla} \quad x = 0. \end{cases}$

2. Dla jakiej wartości parametrów $a, b \in \mathbb{R}$ funkcja $f(x)$ jest ciągła w $\mathbb{R}$, jeśli:

   (a) $f(x) = \begin{cases} ax + b & \text{dla} \quad x < 1, \\ \log_a x & \text{dla} \quad 1 \leqslant x \leqslant 4, \\ \frac{\pi}{\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x-4}\right)} & \text{dla} \quad x > 4. \end{cases}$

   (b) $f(x) = \begin{cases} b + 3(x-1)^2 & \text{dla} \quad x \leqslant 0, \\ x \cdot \arcsin\frac{a}{x} & \text{dla} \quad x > 0. \end{cases}$

3. Wykaż, że równanie $e^x - 2\cos x = 0$ ma pierwiastek w przedziale $(0;\ 1)$.

4. Wykaż, że równanie $\ln x + 2x = 1$ ma dokładnie jedno rozwiązanie w przedziale $\left[\frac{1}{2};\ 1\right]$.

5. Korzystając z twierdzenia Darboux uzasadnij, że równanie $x^x = 3$ ma dokładnie jedno rozwiązanie w przedziale $(1;\ 2)$.

6. Wyznacz równania asyptot wykresu funkcji $f(x)$, jeśli:

   (a) $f(x) = \operatorname{arctg}\left(\frac{2-x}{2+x}\right) - \frac{2}{x-1}$,

   (b) $f(x) = \arcsin\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$,

   (c) $f(x) = e^{\frac{1}{x^2-4}}$,

   (d) $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x} + x$,

   (e) $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 1}$.