ANL1

Z_{8-9}

1. Niech $f : [-a;\ a] \to \mathbb{R}$, gdzie $a > 0$, będzie funkcją ciągłą w $[-a;\ a]$. Wykaż, że:

   (a) $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\ \mathrm{dx} = \int_0^a [f(x) + f(-x)]\ \mathrm{dx}$,

   (b) jeśli f jest funkcją parzystą, to $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\ \mathrm{dx} = 2\int_0^a f(x)\ \mathrm{dx}$,

   (c) jeśli f jest funkcją nieparzystą, to $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\ \mathrm{dx} = 0$.

2. Naszkicuj wykres funkcji $F(x)$, jeśli:

   (a) $F(x) = \displaystyle\int_1^x f(t)\ \mathrm{dt}$, gdzie $f(t) = \begin{cases} t+1 & \text{dla} \quad t < 0, \\ t-1 & \text{dla} \quad t \geqslant 0, \end{cases}$

   (b) $F(x) = \displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^x f(t)\ \mathrm{dt}$, gdzie $f(t) = \begin{cases} -\sin t & \text{dla} \quad t < 0, \\ \sin t & \text{dla} \quad t \geqslant 0. \end{cases}$

3. Nie obliczając całki zbadaj monotoniczność funkcji $F(x)$, jeśli:

   (a) $F(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{\mathrm{dt}}{t^2 + 2t + 2}$,

   (b) $F(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{e^t}{t}\mathrm{dt}$.

4. Oblicz granicę:

   (a) $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} \frac{\displaystyle\int_0^{\sin x} \sqrt{\mathrm{tg} t}\ \mathrm{dt}}{\displaystyle\int_0^{\mathrm{tg} x} \sqrt{\sin t}\ \mathrm{dt}}$,

   (b) $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \frac{\displaystyle\int_{x^2}^{x^2+1} \ln(t+1)\mathrm{dt}}{x^2}$,

   (c) $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \frac{\displaystyle\int_{x^3}^{5} \mathrm{arctg}(t^2)\mathrm{dt}}{x^3 + x}$,

   (d) $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \frac{\displaystyle\int_{e^x}^{e^{3x}} \frac{\mathrm{dt}}{\ln^3 t}}{e^{3x}}$.

5. Oblicz pole obszaru ograniczonego krzywymi o równaniach:

   (a) $y = e^{-x}, \quad y = e^{3x}, \quad y = \sqrt{e}$,

   (b) $2y = -x^2, \quad 2x = -y^2$,

   (c) $y = \sin x, \quad y = \cos 2x$ i zawierającego w swym wnętrzu punkt $\left(0;\ \frac{1}{2}\right)$.

6. Oblicz objętość bryły obrotowej powstałej przez obrót wokół osi OX obszaru opisanego nierównościami:

   (a) $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leqslant y \leqslant \sin x + \cos x$,

(b) $0 \leqslant x \leqslant \pi, \quad \sin x \leqslant y \leqslant 2\sin x.$

7. Oblicz długość łuku krzywej:

   (a) $y = x\sqrt{x}$ dla $0 \leqslant x \leqslant 1$,

   (b) $y = \mathrm{ch} x$ dla $0 \leqslant x \leqslant 1$.