

## Krzywe płaskie

- 9.1** Znaleźć styczną i normalną do krzywej  $(x^2 + y^2)x - ay^2 = 0$ ,  $a \neq 0$ , w punkcie  $P\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right)$ .
- 9.2** W równaniu paraboli  $y = x^2 + bx + c$  wyznaczyć  $b$  i  $c$  tak, aby prosta  $y = 3x - 5$  była styczna do tej paraboli w punkcie  $x = 2$
- 9.3** Znaleźć równanie stycznej do krzywej  $x = t^2 - 1$ ,  $y = t^3 + 1$  i równoległej do prostej  $2x - y + 3 = 0$
- 9.4** Wykazać, że kąt, jaki styczna do krzywej  $y = x^5 + 2x^3 + x + 1$  tworzy z osią  $OX$  należy to przedziału  $\left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right)$
- 9.5** Przez punkt  $\left(0, \frac{1}{4a}\right)$  przeprowadzono prostą  $l$  prostopadłą do osi paraboli  $y = ax^2$ . Wykazać, że styczne do paraboli przeprowadzone w punktach przecięcia prostej  $l$  z parabolą są wzajemnie prostopadłe.
- 9.6** Wykazać, że wszystkie normalne do krzywej o równaniach  $x = a(\cos t + t \sin t)$ ,  $y = a(\sin t - t \cos t)$  są jednakowo odległe od początku układu.
- 9.7** Znaleźć rząd  $n$  styczności krzywych płaskich w początku układu:
- $y_1 = x^3$ ,  $y_2 = x \sin x$
  - $y_1 = \sin x$ ,  $y_2 = x^4 - \frac{1}{6}x^3 + x$
- 9.8** Znaleźć punkt  $P$  oraz parametry  $a$  i  $b$  tak, żeby krzywa  $y = ax + b$  miała z krzywą  $y = x^3 - 3x^2 + 2$  w punkcie  $P$  styczność rzędu drugiego.
- 9.9** Znaleźć krzywą ściśle styczną do  $y = \sin x$  w punkcie  $P(0, 0)$  wyznaczoną z rodziny krzywych  $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ . Jaki jest rząd styczności?
- 9.10** Wyznaczyć  $a$ ,  $b$  i  $c$  tak aby parabola  $y = ax^2 + bx + c$  miała z krzywą  $y = x^3$  w punkcie  $P(1, 1)$  styczność możliwie najwyższego rzędu.
- 9.11** Znaleźć równanie okręgu ściśle stycznego do krzywej  $y = x^4 + x^2 - \frac{1}{2}$  w punkcie  $P(0, -\frac{1}{2})$ . Wyznaczyć rząd styczności.
- 9.12** Znaleźć najmniejszą wartość krzywizny krzywej  $y = \ln x$