Indukcja i wielomiany

4.1 Stosując zasadę indukcji matematycznej udowodnić:

a) Nierówność Bernoulliego: $\forall x \in (1, \infty), \forall n \in N (1+x)n \geqslant 1 + nx$

b) $3|(n^3 + 2n)$

c) $\sum\limits_{k=1}^{n} (2k-1) = n^2$

d) $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \ldots \cdot \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$

e) $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n}{6}(2n^2 + 3n + 1)$

f) $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} > \sqrt{n}$, dla $n \geqslant 2$

g) $10^n - 4$ jest podzielne przez 6

h) $2 + 3^n \geqslant 2^n + 3$

4.2 Podzielić wielomiany:

a) $P(x) = x^4 - 6x^3 + 10x^2 + 2x - 15, \quad Q(x) = x - 3$

b) $P(x) = 15x^4 - 7x^3 + 5x^2 + 17x - 3, \quad Q(x) = 3x^2 - 2x + 5$

c) $P(z) = 2z^4 - 3z^3 + 4z^2 - 5z + 6, \quad Q(z) = z^2 - 3z + 1$

d) $P(z) = z^{16} - 16, \quad Q(z) = z^4 + 2$

4.3 Znając jeden pierwiastek wielomianu znaleźć pozostałe.

a) $P(z) = z^3 - 3\sqrt{2}z^2 + 7z - 3\sqrt{2}, \quad z_1 = \sqrt{2} + i$

b) $P(z) = z^4 - 6z^3 + 7z^2 + 6z - 30, \quad z_1 = 1 - 3i$

c) $P(z) = z^4 - 6z^3 + 18z^2 - 30z + 25, \quad z_1 = 2 + i$