

Liczby zespolone

2.1 Obliczyć:

a) $(1 - 3i) + (4 - i)$

b) $(1 + 2i) - (3 - 6i)$

c) $(1 - i)(6 + 5i)$

d) $\frac{2 + 3i}{1 - i}$

e) $(1 + 3i)(1 - 3i)$

f) $(2 + i)^2$

g) $(\sqrt{3} - i)^3$

h) $\frac{1}{2 - i}$

i) $\frac{1}{(1 - 2i)^2}$

2.2 Znaleźć liczby rzeczywiste x i y które spełniają równania:

a) $x(2 + 3i) + y(5 - 2i) = -8 + 7i$

b) $(2 + yi) \cdot (x - 3i) = 7 - i$

c) $\frac{1 + yi}{x - 2i} = 3i - 1$

d) $\frac{x + yi}{x - yi} = \frac{9 - 2i}{9 + 2i}$

2.3 Rozwiązać równania:

a) $z^2 = 4\bar{z}$

b) $\frac{1 + i}{z} = \frac{2 - 3i}{\bar{z}}$

c) $2z + \bar{z} = 6 - 5i$

d) $(z + 2)^2 = (\bar{z} + 2)^2$

2.4 Obliczyć moduły liczb:

a) $4i$

b) $12i - 5$

c) $(4i + 3)(\sqrt{2} - i)$

d) $\frac{2 - i}{\sqrt{3}i - 1}$

e) $\overline{\sqrt{5} + 2i}$

f) $(1 - \sqrt{2}i)^4$

2.5 Znaleźć postać trygonometryczną liczb:

a) $7 + 7i$ b) $\sqrt{3} - i$ c) $-5 + 5\sqrt{3}i$ d) $-\sqrt{3} - i\sqrt{3}$

2.6 Narysować na płaszczyźnie zespolonej zbiory liczb, które spełniają warunki:

a) $\operatorname{Re}(iz + 2) \geq 0$

b) $\operatorname{Im} z^2 < 0$

c) $\overline{z - i} = z - 1$

d) $\frac{4}{z} = \bar{z}$

e) $|z - 3 + 4i| = 1$

f) $\left| \frac{z - 2i}{z + 1} \right| = 1$

g) $2 \leq |iz - 5| < 3$

h) $|z + 1 - 2i| \geq 3$ i $|z - 3| < 4$

i) $\left| \frac{z + i}{z^2 + 1} \right| \geq 1$

j) $\arg z = \frac{5}{4}\pi$

k) $\frac{\pi}{6} < \arg(z + 3i) < \frac{\pi}{3}$

l) $\pi \leq \arg(iz) < 2\pi$

m) $\operatorname{Im}(z^4) \geq 0$

n) $\operatorname{Re}(iz^6) = 0$

o) $\operatorname{agr} \frac{z + 1}{i} = \frac{3}{2}\pi$

p) $z^6 + 2i|z^6| = (\bar{z})^6$

2.7 Obliczyć i zapisać w postaci algebraicznej:

a) $(1 - i)^{12}$

b) $(1 + i\sqrt{3})^8$

c) $(2\sqrt{3} - 2i)^{30}$

d) $\left(\cos \frac{\pi}{4} - i \sin \frac{\pi}{4}\right)^{10}$

e) $\frac{(1 + i)^{22}}{1 - i\sqrt{3}}^6$

f) $\left(\sin \frac{\pi}{6} + i \cos \frac{\pi}{6}\right)^{24}$

Obliczyć pierwiastki:

a) $\sqrt{-1 + i\sqrt{3}}$

b) $\sqrt[3]{-27}$

c) $\sqrt[4]{-4}$

d) $\sqrt[5]{32i}$

e) $\sqrt[3]{(2 - i)^6}$

f) $\sqrt[3]{(2 - 2i)^9}$