

Funkcjonał zależny od więcej niż jednej funkcji. Ekstrema warunkowe.

3.1 Znaleźć ekstremale funkcyjnałów

$$\text{a) } J = \int_0^{\frac{\pi}{\sqrt{2}}} (-yz + (y')^2 + (z')^2) dx, \quad y(0) = z(0) = 0, \quad y\left(\frac{\pi}{\sqrt{2}}\right) = z\left(\frac{\pi}{\sqrt{2}}\right) = 1$$

$$\text{b) } J = \int_0^1 ((y')^2 + (z')^2 + 4x^2y + e^x z) dx, \quad y(0) = 1, \quad y(1) = 2, \quad z(0) = 1, \quad z(1) = 3$$

$$\text{c) } J = \int_0^1 ((y')^2 + (z')^2 + y'z') dx$$

$$\text{d) } J = \int_0^1 (2yz_2y^2 + (y')^2 - (z')^2 + y'z') dx$$

3.2 Znaleźć ekstremum warunkowe funkcyjnałów

$$\text{a) } J = \int_0^1 ((y')^2 + yx) dx \quad \text{z warunkami } y(0) = 1, \quad y(1) = 2, \quad \int_0^1 y dx = 1$$

$$\text{b) } J = \int_0^1 ((y')^2 + ye^x) dx \quad \text{z warunkami } y(0) = \frac{1}{2}, \quad y(1) = e, \quad \int_0^1 y dx = 1$$

$$\text{c) } J = \int_0^1 ((y')^2 + x^2) dx \quad \text{z warunkami } y(0) = y(1) = 0, \quad \int_0^1 y^2 dx = 2$$

Odpowiedzi:

$$\text{3.1: a) } y = \sin\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right), \quad z = \sin\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right), \quad \text{b) } y = \frac{1}{6}x^4 + \frac{5}{6}x + 1, \quad z = \frac{1}{2}e^x + \frac{5-e}{2}x + \frac{1}{2}, \quad \text{c) } y = \frac{2C_1 - C_2}{3}x + C_3, \quad z = \frac{2C_2 - C_1}{3}x + C_4, \quad \text{d) } y = C_1 \sin x + C_2(x \sin x - 2 \cos x) + C_3 \cos x + C_4(2 \sin x + x \cos x), \quad z = C_1 \sin x + C_2 x \sin x + C_3 \cos x + C_4 x \cos x$$

$$\text{3.2: a) } y = \frac{1}{12}x^3 + \frac{23}{8}x^2 - \frac{47}{24}x + 1, \quad \text{b) } y = \frac{1}{2}e^x + \frac{9e - 12}{2}x^2 + (3 - 2e)x, \quad \text{c) } y = 2 \sin k\pi x, \quad k \in \mathbb{Z}$$