

Liczby zespolone

1.1 Obliczyć:

- | | | |
|------------------------------|---------------------------------|-----------------------------------|
| a) $\text{Im}((3-i)^2(2+i))$ | b) $\text{Re}\frac{1+2i}{3i-2}$ | c) $(2+i)(2-i) \overline{5-12i} $ |
| d) $\sqrt{3+4i}$ | e) $\sqrt{8i}$ | f) $ -3+4i \sqrt{8+6i}$ |

1.2 Zapisać w postaci trygonometrycznej:

- | | | |
|--------------------------|-----------------------------|--|
| a) $1+i\sqrt{3}$ | b) $\sqrt{2}-i\sqrt{6}$ | c) $-1+i$ |
| d) $i\cos\frac{\pi}{11}$ | e) $\cos\alpha-i\sin\alpha$ | f) $2\sin\frac{\pi}{9}\cos\frac{\pi}{9}+i(2\cos^2\frac{\pi}{9}-1)$ |

1.3 Obliczyć:

- | | | |
|-----------------------------|------------------------|----------------------------------|
| a) $(1-i\sqrt{3})^{25}$ | b) $(1+i)^6$ | c) $\sqrt[6]{1}$ |
| d) $\sqrt[4]{-8+8\sqrt{3}}$ | e) $\sqrt[3]{(1+i)^6}$ | f) $\sqrt[4]{(i-\sqrt{3})^{12}}$ |

1.4 Rozwiązać równania:

- | | |
|---------------------------------------|---|
| a) $z^2 = 4\bar{z}$ | b) $\frac{1+i}{z} = \frac{2-3i}{\bar{z}}$ |
| c) $(z+2)^2 = (\bar{z}+2)^2$ | d) $z^2 + z - i + 1 = 0$ |
| e) $(1+i)z^2 - (6+2i)z + 14 - 2i = 0$ | f) $z^4 + z^2 + 1 = 0$ |
| g) $(iz)^4 = (1-2i)^4$ | h) $\text{Re}(z(1+i)) + z\bar{z} = 0$ |

1.5 Narysować na płaszczyźnie zespolonej zbiory:

- a) $|z+2i| = 4$
- b) $1 < |iz-5| \leq 2$
- c) $\left|\frac{z-2}{z+3i}\right| = 1$
- d) $\left|\frac{z-i}{z+i}\right| > 1$
- e) $\text{Im}z^6 \geq 0$
- f) $\frac{\pi}{6} \leq \arg\frac{z(1+i)}{-1+i} \leq \frac{\pi}{3}$
- g) $|z+1| + |z-i| = 4$

1.6 Wiedząc, że $z = 1-3i$ jest pierwiastkiem wielomianu $W(z) = z^4 - 2z^3 + 7z^2 + 6z - 30$ znaleźć pozostałe.

1.7 Korzystając ze wzoru de Moivre'a znaleźć wyrazić $\cos 5\phi$ za pomocą funkcji $\cos \phi$ i $\sin \phi$.

1.8 $|z_1 + z_2| = \sqrt{3}$, $|z_1| = |z_2| = 1$ Obliczyć $|z_1 - z_2|$

1.9 Udowodnić, że $\cos\frac{\pi}{11} + \cos\frac{3\pi}{11} + \cos\frac{5\pi}{11} + \cos\frac{7\pi}{11} + \cos\frac{9\pi}{11} = \frac{1}{2}$