Zad. 1	Zad. 2	Zad. 3	Zad. 4	Zad. 5	SUMA

1. (10p.) Pokaż, że w każdym grafie $|E(G)| \geq \binom{\chi(G)}{2}$.

Rozwiązanie. Rozważmy kolorowanie grafu G na $\chi := \chi(G)$ kolorów. Zauważmy, że dla każdej pary kolorów a, b musi istnieć krawędź między wierzchołkiem w kolorze a a wierzchołkiem w kolorze b. W przeciwnym przypadku moglibyśmy każdy wierzchołek w kolorze b przekolorować na kolor a i w ten sposób otrzymalibyśmy kolorowanie grafu G na $\chi - 1$ kolorów, sprzeczność. Co więcej, sąsiedztwo dla każdej pary kolorów musi być zrealizowane przez inną krawędź. Ponieważ par kolorów jest dokładnie $\binom{\chi}{2}$, w grafie G istnieje co najmniej tyle krawędzi. $\square$

2. (10p.) Niech $G = (V, E)$ będzie grafem spójnym. Pokaż, że G jest eulerowski wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $V' \subseteq V$, $V' \neq \emptyset$, $V' \neq V$, liczba krawędzi łączących V' i $V \setminus V'$ jest parzysta.

Rozwiązanie. ($\leftarrow$) Rozważmy dowolny wierzchołek v. Z założenia liczba krawędzi łączących zbiory wierzchołków $\{v\}$ i $V \setminus \{v\}$ jest parzysta, czyli stopień wierzchołka v jest parzysty. Ponieważ G jest spójny, to z tw. Eulera otrzymujemy, że G jest eulerowski.

($\rightarrow$) Rozważmy dowolny zbiór $V' \subseteq V$, $V \neq \emptyset$, $V \neq V$ i niech K oznacza zbiór krawędzi między V' i $V \setminus V'$. Nazwijmy wierzchołki z V' białymi, a z $V \setminus V'$ czarnymi.

Niech $C = v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \ldots, e_m$ będzie obwodem Eulera w G. Zauważmy, że usunięcie krawędzi z K z ciągu C dzieli go $|K|$ niepustych podciągów (może się zdarzyć, że podciąg składa się z jednego wierzchołka). Wszystkie wierzchołki w jednym podciągu mają ten sam kolor, a kolejne podciągi mają różne kolory. Zatem liczba podciągów musi być parzysta, a co za tym idzie, $|K|$ jest parzyste. $\square$

3. (10p.) Niech $r \in \mathbb{N}$. Niech $G = (V, E)$ będzie grafem niespójnym grafem r-regularnym o co najmniej trzech wierzchołkach. Wykazać, że $\overline{G}$, czyli dopełnienie grafu G, jest grafem hamiltonowskim.

Rozwiązanie. Dla dowolnego grafu G i jego dowolnego wierzchołka prawdą jest, iż

$$\deg_{\overline{G}}(v) = |V(G)| - 1 - \deg_G(v),$$

czyli w przypadku rozważanego grafu $\deg_{\overline{G}}(v) = |V| - 1 - r$, co oznacza, że graf $\overline{G}$ jest regularny.

Rozważmy teraz składową S grafu G, która ma najmniej wierzchołków. Mamy $|V(S)| \leqslant |V|/2$. Ponieważ każdy wierzchołek składowej S sąsiaduje w grafie $\overline{G}$ z wierzchołkami wszystkich pozostałych składowych grafu G, to jego stopień musi być równy co najmniej $|V|/2$. Ale ponieważ $\overline{G}$ jest regularny, to $\delta(\overline{G}) \geqslant |V|/2$. Ponieważ $\overline{G}$ ma co najmniej trzy wierzchołki, z twierdzenia Diraca wynika, że jest on hamiltonowski. $\square$

4. (10p.) Niech $G = (V, E)$ będzie grafem planarnym spełniającym $\delta(G) \geqslant 4$, w którym nie ma wierzchołków stopnia 5. Pokaż, że G ma co najmniej 6 wierzchołków stopnia 4.

Rozwiązanie. Oszacujemy sumę stopni wierzchołków grafu G. W tym celu oznaczmy liczbę wierzchołków stopnia 4 przez k:

$$\sum_{v \in V} \deg_G(v) \geqslant 4k + 6(|V| - k) = 6|V| - 2k.$$

Dzięki lematowi o uściskach dłoni otrzymujemy $2|E| \geqslant 6|V| - 2k$. Ponieważ G jest planarny, to $|E| \leqslant 3|V| - 6$. Łącznie te dwie nierówności dają nam

$$6|V| - 12 \geqslant 6|V| - 2k,$$

co jest równoważne temu, że $k \geqslant 6$. □

5. (10p.) Niech G będzie grafem dwudzielnym o równolicznych klasach dwudzielności X, Y, w którym dla każdego $S \subseteq X$ zachodzi $|S| \leq |N(S)| + 2$. Udowodnij, że dla dowolnego $k \geq 2$, graf $G \,\square\, C_{2k}$ ma skojarzenie doskonałe.

Uwaga: Założenie z pierwszego zdania nie jest potrzebne do rozwiązania zadania. Nie było to działanie zamierzone, najwidoczniej zadanie przypadkiem wyszło łatwiejsze niż zakładane. Rozwiązanie poniżej nie korzysta nigdzie z założeń o grafie G. Dziękuję studentom z roku 2020/21 za uwagę.

Rozwiązanie. Oznaczmy $V(G) = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, $V(C_{2k}) = \{u_1, u_2, \ldots, u_{2k}\}$. Dla każdego $j \in [n]$ graf $G \,\square\, C_{2k}[\{(v_j, u), u \in C_{2k}\}]$ jest cyklem długości $2k$. Z każdej z tych kopii C_{2k} bierzemy co drugą krawędź do skojarzenia M. Dokładniej $M = \bigcup_{v_j \in V(G)} M_j$, gdzie $M_j = \{(v_j, u_{2i-1})(v_j, u_{2i}) : i \in [k]\}$.
Dla każdego $j \in [n]$ w M_j mamy krawędzie o parach indeksów przy u: $(1,2), (3,4), \ldots (2k-1, 2k)$, zatem nie mają wspólnych wierzchołków. Dwie krawędzie z M_j i M_i nie mają wspólnych wierzchołków, gdyż różnią się pierwszą współrzędną wierzchołka (v_j w M_j i v_i w M_i). Zatem M jest skojarzeniem w $G \,\square\, C_{2k}$. Co więcej, zauważmy, że każdy wierzchołek z $V(G) \times V(C_{2k})$ należy do pewnej krawędzi ze skojarzenia M, więc M jest skojarzeniem doskonałym. $\square$