Zad. 1	Zad. 2	Zad. 3	Zad. 4	Zad. 5	SUMA

1. (10p.) Dla dwóch liczb $k, d \geqslant 1$, *siatką Hamminga*, ozn. $H(k, d)$, nazywamy graf, którego wierzchołkami są wszystkie d-elementowe ciągi nad alfabetem $[k]$ $(= \{1, 2, \ldots, k\})$, zaś krawędzie łączą te ciągi, które różnią się na dokładniej jednej współrzędnej. Znajdź $\chi(H(k, d))$.

Rozwiązanie. Pokażemy, że $\chi(H(k, d)) = k$. Najpierw zauważmy, że zbiór wierzchołków

$$\{(\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{d-1 \text{ razy}}, i) \ : \ i \in [k]\}$$

indukuje w $H(k, d)$ klikę o k wierzchołkach. Zatem $\chi(H(k, d)) \geqslant k$.

Teraz zdefiniujmy funkcję $f \colon V(H(k, d)) \to \{0, 1, \ldots, k-1\}$ w następujący sposób:

$$f((a_1, a_2, \ldots, a_d)) = \sum_{i=1}^{d} a_i \pmod k.$$

Pokażmy, że f jest poprawnym kolorowaniem grafu $H(k, d)$. Rozważmy sąsiadujące wierzchołki tego grafu: $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_d)$ i $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_d)$. Z definicji wiemy, że istnieje $j \in [d]$, takie że $a_j \neq b_j$ i dla każdego $j' \neq j$ zachodzi $a_{j'} = b_{j'}$.

Oznaczając przez $\equiv_k$ przystawanie modulo k, otrzymujemy:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{a}) - f(\mathbf{b}) &\equiv_k \Big(\sum_{i=1}^{d} a_i \pmod k\Big) - \Big(\sum_{i=1}^{d} b_i \pmod k\Big) \\ &\equiv_k \sum_{i=1}^{d} a_i - \sum_{i=1}^{d} b_i \\ &\equiv_k a_j - b_j. \end{aligned}$$

Ponieważ różne liczby z przedziału $[k]$ dają różne reszty modulo k, otrzymujemy, że $f(\mathbf{a}) - f(\mathbf{b}) \neq 0$, czyli $f(\mathbf{a}) \neq f(\mathbf{b})$. Zatem f jest poprawnym kolorowaniem grafu $H(k, d)$, a ponieważ f używa k kolorów, otrzymujemy $\chi(H(k, d)) \leqslant k$. $\square$

2. (10p.) Niech $n = k^2$ dla pewnego $k \geqslant 1$ i rozważmy graf pełny, którego wierzchołkami są liczby $1, 2, \ldots, n$. Pokaż, że dla każdego kolorowania krawędzi grafu K_n na czerwono i niebiesko, otrzymamy czerwony graf pełny o k wierzchołkach lub niebieską ścieżkę o k wierzchołkach, na której kolejne wierzchołki tworzą ciąg rosnący.

Rozwiązanie. Przez *ścieżkę rosnącą* będziemy mieli na myśli niebieską ścieżkę, której kolejne wierzchołki tworzą ciąg rosnący.

Przypiszmy każdemu wierzchołkowi v grafu K_n liczbę $f(v)$, która jest równa liczbie wierzchołków na najdłuższej rosnącej ścieżce, zaczynającej się w v (czyli v jest najmniejszym wierzchołkiem z tej ścieżki). Zauważmy, że jeśli dla jakiegoś wierzchołka $f(v) \geqslant k$, to graf ma rosnącą ścieżkę o k wierzchołkach. Przypuśćmy zatem, że dla każdego v zachodzi $f(v) < k$, czyli f przyjmuje wartości ze zbioru $\{0, 1, \ldots, k-1\}$. Z zasady szufladkowej mamy, że istnieje $i \in \{0, 1, \ldots, k-1\}$, takie że dla co najmniej $n/k = k$ wierzchołków wartość f wynosi i. Niech X będzie zbiorem tych wierzchołków v, dla których $f(v) = i$.

Pokażemy, że wszystkie krawędzie, łączące wierzchołki z X, są czerwone. Rozważmy dwa wierzchołki $u, v \in X$, takie że $u < v$, i przypuśćmy, że krawędź uv jest niebieska. Skoro $v \in X$, istnieje rosnąca ścieżka zaczynająca się z v, która ma i wierzchołków. Zauważmy, że po dodaniu na początek tej ścieżki wierzchołka u, otrzymujemy rosnącą ścieżkę, zaczynającą się w u, która ma $i + 1$ wierzchołków. Jest to sprzeczne z tym, że $u \in X$.

Zatem skoro X ma co najmniej k wierzchołków i wszystkie krawędzie o obu końcach w X są czerwone, otrzymaliśmy czerwoną klikę o k wierzchołkach. $\square$

3. (10p.) Niech $G = (V, E)$ będzie grafem o n wierzchołkach i $2n$ krawędziach i niech $c : E \to [n]$ będzie poprawnym kolorowaniem krawędziowym G, takim że każdy kolor występuje na dokładnie dwóch krawędziach oraz że każdy wierzchołek widzi dokładnie 4 kolory.

Pokaż, że istnieje zbiór $E' \subseteq E$, taki że każda krawędź z E' ma inny kolor i graf $G' = (V, E')$ nie ma izolowanych wierzchołków.

Rozwiązanie. Zdefiniujmy graf dwudzielny B o klasach dwudzielności X i Y w następujący sposób. Niech $X := V(G)$ i $Y := [n]$. Dla $x \in X$ i $y \in Y$ istnieje krawędź xy wtedy i tylko wtedy, gdy w G istnieje krawędź o jednym z końców w x, której c przypisuje kolor y (czyli gdy wierzchołek x widzi kolor y). Oczywiście $|X| = |V(G)| = n = |Y|$.

Zauważmy, że szukany zbiór E' w G odpowiada skojarzeniu doskonałemu w grafie B. Dla każdej krawędzi xy ze skojarzenia dodajemy do E' krawędź grafu G w kolorze y wychodzącą z x. Ponieważ skojarzenie jest doskonałe, dla każdego elementu z X dołączymy do E' pewną krawędź, dzięki czemu żaden z wierzchołków nie pozostanie izolowany. Z drugiej strony, dla każdego koloru musi istnieć wierzchołek, dla którego istnieje w E' krawędź w tym kolorze.

Zauważmy, że graf B jest regularny – każdy element zbioru X zostaje połączony z dokładnie czterema kolorami z Y, a każdy kolor z Y występuje na dwóch krawędziach, czyli (skoro kolorowanie c jest poprawne) na czterech wierzchołkach grafu G. Wiemy (z ćwiczeń) że w każdym grafie dwudzielnym regularnym istnieje skojarzenie doskonałe, co kończy dowód. $\square$

4. (10p.) Powiemy, że graf G jest *hamiltonowsko spójny*, jeśli dla każdej pary różnych wierzchołków u, v istnieje ścieżka Hamiltona o końcach w u i v. Wykaż, że jeśli G jest hamiltonowsko spójny oraz $|V(G)| \geqslant 4$, to

$$|E(G)| \geqslant \left\lfloor \frac{3|V(G)|+1}{2} \right\rfloor.$$

Rozwiązanie. Zauważmy, że

$$\left\lfloor \frac{3|V(G)|+1}{2} \right\rfloor = \begin{cases} \frac{3|V(G)|}{2} & \text{dla parzystego } |V(G)|, \\ \frac{3|V(G)|+1}{2} & \text{dla nieparzystego } |V(G)|. \end{cases}$$

Pokażemy najpierw, że jeśli G jest hamiltonowsko spójny oraz $|V(G)| \geqslant 4$, to dla każdego $v \in V(G)$ zachodzi $\deg(v) \geqslant 3$. Przypuśćmy przeciwnie i niech u będzie wierzchołkiem o stopniu co najwyżej dwa. Mamy trzy możliwości:

1. $\deg(u) = 0$. Jednak wówczas G nie jest spójny, więc nie istnieje w nim żadna ścieżka Hamiltona. Z tego wynika, że nie może być hamiltonowsko spójny, sprzeczność.

2. $\deg(u) = 1$. Niech x będzie sąsiadem u. Zauważmy, że x musi być drugim wierzchołkiem każdej ścieżki Hamiltona, która rozpoczyna się w u, a skoro G ma co najmniej cztery wierzchołki, oznacza to, że nie istnieje ścieżka Hamiltona o końcach w u i x. Sprzeczność.

3. $\deg(u) = 2$. Niech x i y będą różnymi sąsiadami u. Niech P będzie ścieżką Hamiltona z x do y. Wierzchołek u ma tylko dwóch sąsiadów, jednym z nich jest x, więc u musi być drugim wierzchołkiem na P – w przeciwnym wypadku nie uda nam się stworzyć ścieżki, która będzie przechodzić przez u. Ale wówczas kolejnym wierzchołkiem na P musi być y, bo u nie ma już innych sąsiadów, a ponieważ G ma co najmniej cztery wierzchołki, P nie jest ścieżką Hamiltona, sprzeczność.

Skoro więc z każdego wierzchołka grafu G wychodzą co najmniej 3 krawędzie, z lematu o uściskach dłoni otrzymujemy, że $2|E(G)| = \sum_{v \in V(G)} \deg(v) \geqslant 3|V(G)|$, co kończy dowód dla parzystych $|V(G)|$. Ponieważ $2|E(G)|$ jest liczbą parzystą, to w przypadku gdy $|V(G)|$ jest nieparzyste, możemy dodatkowo zapisać, że $2|E(G)| \geqslant 3|V(G)| + 1$, co również pozwala otrzymać żądaną nierówność. $\square$

5. (10p.) Niech $n > 1$, a V będzie zbiorem wszystkich permutacji zbioru $[n]$. Zdefiniujmy graf G, którego zbiorem wierzchołków jest V, a $\sigma, \pi \in V$ sąsiadują w G, jeśli σ można otrzymać z π przez transpozycję, czyli zamianę dwóch wyrazów miejscami (możemy zamieniać dowolne wyrazy, niekoniecznie kolejne). Zbadaj, dla jakich n graf G jest eulerowski.

Rozwiązanie. Zauważmy na początku, że graf G jest zawsze spójny. Wynika to choćby ze znanego z algebry liniowej faktu, że każdą permutację można otrzymać z permutacji identycznościowej przez ciąg transpozycji, albo z faktu, że algorytmem sortowania bąbelkowego można posortować dowolną permutację.

Niech $\sigma \in V$. Permutacja σ ma n wyrazów, więc jest $\binom{n}{2}$ par jej wyrazów. Tym samym możemy z σ otrzymać $\binom{n}{2}$ permutacji przez transpozycję, a to oznacza, że $\deg_G(\sigma) = \binom{n}{2}$. Skoro permutacja σ była wybrana arbitralnie, to G jest grafem $\binom{n}{2}$-regularnym. Pozostaje zbadać, kiedy $\binom{n}{2}$ jest parzyste. Mamy

$$\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Aby ta liczba była parzysta, to licznik w rozkładzie na czynniki pierwsze musi mieć 2 co najmniej w drugiej potędze. Czynnik 2 nie może jednocześnie pojawiać się w n i $n-1$, więc n lub $n-1$ musi być podzielne przez 4. Podsumowując, G jest eulerowski wtedy i tylko wtedy, gdy $n = 0 \pmod 4$ lub $n = 1 \pmod 4$. □