1. (10p.) Niech $G = (V, E)$ będzie grafem. Udowodnij, że

$$\alpha(G) \geqslant \frac{|V|}{\Delta(G)+1}.$$

Przypomnijmy, że $\alpha(G)$ oznacza liczbę wierzchołków największego zbioru niezależnego w grafie G.

Rozwiązanie 1. Niech $A \subseteq V$ będzie zbiorem niezależnym największej liczności w G (czyli $|A| = \alpha(G)$). Wtedy każdy wierzchołek ze zbioru $V \setminus A$ ma co najmniej jednego sąsiada w A – inaczej taki wierzchołek moglibyśmy dołączyć do A, tworząc większy zbiór niezależny. Stąd $V \setminus A \subseteq \bigcup_{a \in A} N(a)$, gdzie $N(a)$ oznacza zbiór sąsiadów wierzchołka a. W konsekwencji

$$|V - A| \leqslant \left|\bigcup_{a\in A} N(a)\right| \leqslant \sum_{a\in A} |N(a)| \leqslant \sum_{a\in A} \Delta(G) = \alpha(G)\Delta(G)$$

i dalej

$$|V| = |A| + |V \setminus A| \leqslant \alpha(G) + \alpha(G)\Delta(G) = \alpha(G)(\Delta(G)+1),$$

z czego wynika

$$\alpha(G) \geqslant \frac{|V|}{\Delta(G)+1}.$$

□

Rozwiązanie 2. Rozważmy następujący algorytm zachłanny, konstruujący zbiór niezależny.

1. $S \leftarrow \emptyset$
2. Jeśli $V = \emptyset$, zakończ i zwróć S.
3. $v \leftarrow$ dowolny wierzchołek z V
4. $S \leftarrow S \cup \{v\}$
5. $V \leftarrow V \setminus N[v]$ (gdzie $N[v] := N(v) \cup \{v\}$)
6. Wróć do kroku 2.

Zauważmy, że zbiór konstruowany przez ten algorytm jest niezależny, ponieważ po dołączeniu nowego wierzchołka do S, usuwamy z grafu wszystkich jego sąsiadów. Niech k będzie licznością zbioru skontruowanego przez powyższy algorytm, oczywiście $\alpha(G) \geqslant k$.

Zauważmy, że k jest równe liczbie wykonań instrukcji w linii 4. Ile razy wykona się na linijka? Po każdym wykonaniu usuwamy z grafu domknięte sąsiedztwo pewnego wierzchołka, czyli co najwyżej $\Delta(G) + 1$ wierzchołków. Zatem liczba iteracji algorytmu wynosi co namniej $|V|/(\Delta(G) + 1)$. Podsumowując, otrzymujemy

$$\alpha(G) \geqslant k \geqslant \frac{|V|}{\Delta(G)+1}.$$

□

Rozwiązanie 3. Przypomnijmy, że każdy graf G ma poprawne kolorowanie na $\Delta(G) + 1$ kolorów. Ustalmy to kolorowanie i rozważmy zbiór X wierzchołków w kolorze, który występuje najczęściej. Jest to zbiór niezależny, a z zasady szufladkowej jego rozmiar wynosi co najmniej $|V|/(\Delta(G) + 1)$. Zatem

$$\alpha(G) \geqslant |X| \geqslant \frac{|V|}{\Delta(G)+1}.$$

Jest do właściwie to samo zadanie, co 5.1. z ćwiczeń. □

2. (10p.) Niech $d \geqslant 1$ i niech $G = (V, E)$ będzie grafem o n wierzchołkach, $m = \frac{d(n+1)}{2}$ krawędziach oraz najmniejszym stopniu $\delta(G) \geqslant d$. Pokaż, że w G istnieje skojarzenie liczności $\left\lceil \frac{d(n+1)}{4d+2} \right\rceil$.

Rozwiązanie. Pokażemy, że istnieje poprawne $(2d+1)$-kolorowanie krawędziowe G, a zatem w jednym z $2d+1$ kolorów musi być co najmniej $\left\lceil \frac{m}{2d+1} \right\rceil = \left\lceil \frac{d(n+1)}{4d+2} \right\rceil$ krawędzi. Oczywiście krawędzie te tworzą skojarzenie. W tym celu pokażemy, że $\Delta(G) \leqslant 2d$. Załóżmy nie wprost, że istnieje w G wierzchołek u o stopniu większym niż $2d$. Ponieważ G ma $\frac{d(n+1)}{2}$ krawędzi, to z lematu o uściskach dłoni mamy:

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2|E| = d(n+1).$$

Podstawiając, że $\deg(u) \geqslant 2d+1$ dostajemy:

$$\sum_{v \in V \setminus \{u\}} \deg(v) = \sum_{v \in V} \deg(v) - \deg(u) \leqslant d(n+1) - (2d+1) = d(n-1) - 1.$$

Z drugiej strony, ponieważ $\delta(G) \geqslant d$, to:

$$\sum_{v \in V \setminus \{u\}} \deg(v) \geqslant d(n-1),$$

co daje nam sprzeczność. Zatem $\Delta(G) \leqslant 2d$ i z twierdzenia Vizinga dostajemy $\chi'(G) \leqslant 2d+1$, co oznacza, że w G musi istnieć skojarzenie o co najmniej $\left\lceil \frac{d(n+1)}{4d+2} \right\rceil$ krawędziach. $\square$

3. (10p.) Niech $n \in \mathbb{N}_+$ i niech T_n będzie grafem o zbiorze wierzchołków

$$V(T_n) = \{(x, y, z) : x, y, z \in \{0, 1, \ldots, n\} \text{ oraz } x + y + z = n\},$$

takim że (x_1, y_1, z_1) i (x_2, y_2, z_2) są krawędzią wtedy i tylko wtedy, gdy różnią się na każdej współrzędnej o co najwyżej 1 (oraz $(x_1, y_1, z_1) \neq (x_2, y_2, z_2)$). Pokaż, że T_n jest eulerowski.

Rozwiązanie. Z twierdzenia Eulera wiemy, że pokazanie, że T_n jest eulerowski jest równoważne pokazaniu, że T_n jest spójny oraz że każdy jego wierzchołek ma stopień parzysty.

Żeby pokazać, że T_n jest spójny, wystarczy pokazać, że z dowolnego wierzchołka (x, y, z) istnieje ścieżka do wierzchołka $(n, 0, 0)$. Skonstruujemy tę ścieżkę w dwóch krokach.

Najpierw rozważmy ścieżkę $P = (a_1, b_1, z), (a_2, b_2, z), (a_3, b_3, z), \ldots, (a_{y+1}, b_{y+1}, z)$, gdzie $a_1 = x, b_1 = y, a_{y+1} = n - z, b_{y+1} = 0$, a dla każdego $i > 1$ mamy $a_i = a_{i-1} + 1$ oraz $b_i = b_{i-1} - 1$. Intuicyjnie, ścieżka ta zaczyna w wierzchołku (x, y, z) i każdy jej kolejny wierzchołek powstaje z poprzedniego przez zwiększenie pierwszej współrzędnej o 1 i zmniejszenie drugiej współrzędnej o 1. Zauważmy, że P jest (x, y, z)-$(n - z, 0, z)$-ścieżką w T_n. Podobnie możemy zdefiniować ścieżkę $Q = (c_1, 0, d_1), (c_2, 0, d_2), \ldots, (c_{z+1}, 0, d_{z+1})$, gdzie $c_1 = n - z, d_1 = z, c_{z+1} = n, d_{z+1} = 0$, a dla każdego $i > 1$ mamy $c_i = c_{i-1} + 1$ oraz $d_i = d_{i-1} - 1$. Intuicyjnie, w tej ścieżce każdy kolejny wierzchołek powstaje z poprzedniego przez zwiększenie pierwszej współrzędnej o 1 i zmniejszenie trzeciej współrzędnej o 1. Zauważmy, że Q jest $(n - z, 0, z)$-$(n, 0, 0)$-ścieżką w T_n, istnieje więc (x, y, z)-$(n, 0, 0)$-ścieżka w T_n powstała z połączenia P i Q.

Pozostało pokazać, że każdy wierzchołek T_n ma stopień parzysty. Zauważmy, że w T_n są trzy rodzaje wierzchołków:

- wierzchołki $(n, 0, 0), (0, n, 0)$ i $(0, 0, n)$, każdy z nich ma dokładnie dwóch sąsiadów:

$$\begin{aligned} N((n, 0, 0)) &= \{(n - 1, 1, 0), (n - 1, 0, 1)\}, \\ N((0, n, 0)) &= \{(1, n - 1, 0), (0, n - 1, 1)\}, \\ N((0, 0, n)) &= \{(0, 1, n - 1), (1, 0, n - 1)\}. \end{aligned}$$

- wierzchołki $(x, y, 0), (0, x, y)$ i $(x, 0, y)$, takie że $x, y \notin \{0, n\}$ (czyli $x + y = n$), każdy z nich ma dokładnie czterech sąsiadów:

$$\begin{aligned} N((x, y, 0)) &= \{(x - 1, y + 1, 0), (x + 1, y - 1, 0), (x - 1, y, 1), (x, y - 1, 1)\}, \\ N((0, x, y)) &= \{(0, x + 1, y - 1), (0, x - 1, y + 1), (1, x - 1, y), (1, x, y - 1)\}, \\ N((x, 0, y)) &= \{(x - 1, 0, y + 1), (x + 1, 0, y - 1), (x, 1, y - 1), (x - 1, 1, y)\}. \end{aligned}$$

- wierzchołki (x, y, z), takie że $x, y, z \notin \{0, n\}$, każdy z nich ma dokładnie sześciu sąsiadów:

$$\begin{aligned} N((x, y, z)) = \{&(x - 1, y + 1, z), (x + 1, y - 1, z), (x - 1, y, z + 1), \\ &(x + 1, y, z - 1), (x, y + 1, z - 1), (x, y - 1, z + 1)\}. \end{aligned}$$

Zatem z twierdzenia Eulera otrzymujemy, że T_n jest parzysty. □

4. (10p.) Niech G będzie 2-spójnym, 3-regularnym grafem planarnym, i niech $x, y, z \in V(G)$ tworzą trójkąt w G. Pokaż, że w każdym rysunku płaskim grafu G istnieje ściana incydentna z wierzchołkami x, y, z i tylko z nimi.

Rozwiązanie. Nazwijmy ścianę, która jest incydentna z wierzchołkami x, y, z i tylko z nimi *dobrą*. Załóżmy, że istnieje rysunek płasku grafu G, że żadna ściana nie jest dobra, ustalmy go.

Krzywe reprezentujące krawędzie xy, yz i zx tworzą krzywą zamkniętą, która dzieli płaszczyznę na dwa rozłączne obszary – wewnętrzny C_1 i zewnętrzny C_2. Żaden z nich nie jest dobrą ścianą, zatem zarówno w C_1, jak i w C_2 muszą znajdować się jeszcze jakieś wierzchołki grafu G, nazwijmy je odpowiednio v i u. Ponieważ G jest 2-spójny, jest spójny, musi istnieć krawędź e o dokładnie jednym końcu w $\{x, y, z\}$, której wnętrze jest zawarte w C_1 (a dokładniej mówiąc, wnętrze krzywej, która reprezentuje e w naszym ustalonym zanurzeniu płaskim). Podobnie, musi istnieć krawędź f, której wnętrze jest zawarte w C_2 i ma dokładnie jeden koniec w zbiorze $\{x, y, z\}$. Ponieważ graf jest 3-regularny, krawędzie te nie są incydentne z tym samym wierzchołkiem z $\{x, y, z\}$. Bez utraty ogólności załóżmy, że e jest incydentna z x, natomiast f z y. Ponadto, niech g będzie krawędzią incydentną z z, której drugi koniec nie jest w $\{x, y, z\}$.

Ponieważ G jest 3-regularny, jedyne krawędzie incydentne z y to f, xy i yz. Zauważmy, że jeśli wnętrze g jest zawarte w C_1, wierzchołek y jest wierzchołkiem rozcinającym – jedyna v-u-ścieżka przechodzi przez f, zatem też przez y. Analogicznie, jedyne krawędzie incydentne z x to e, xy i zx, jeśli więc wnętrze g jest zawarte w C_2, wówczas x jest wierzchołkiem rozcinającym – jedyna v-u-ścieżka przechodzi przez e, więc i przez x. W obu przypadkach otrzymujemy sprzeczność z 2-spójnością G. $\square$

5. (10p.) Niech $\mathcal{G}$ będzie rodziną grafów. Pokaż, że następujące zdania są równoważne.

1. Istnieje funkcja $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, że każdy graf z $\mathcal{G}$ o co najmniej $f(t)$ wierzchołkach zawiera podgraf K_t lub podgraf *indukowany* $K_{t,t}$.

2. Istnieje funkcja $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, że każdy graf z $\mathcal{G}$ o co najmniej $g(r)$ wierzchołkach zawiera podgraf $K_{r,r}$.

Przypomnijmy, że przez $K_{n,n}$ oznaczamy graf pełny dwudzielny, którego każda klasa dwudzielności ma n wierzchołków. Mówimy, że graf G zawiera graf H jako podgraf indukowany, jeśli istnieje zbiór wierzchołków $X \subseteq V(G)$ taki, że podgraf G indukowany przez zbiór X jest izomorficzny z H.

Rozwiązanie. Pokażmy najpierw, że (1) $\to$ (2). Zdefiniujmy $g(r) := f(2r)$ i rozważmy dowolny graf $G \in \mathcal{G}$ o co najmniej $g(r) = f(2r)$ wierzchołkach. Z własności (1) wiemy, że G zawiera (a) podgraf K_{2r} lub (b) podgraf indukowany $K_{2r,2r}$. Zauważmy, że każda z tych dwóch struktur zawiera $K_{r,r}$ jako podgraf. W przypadku (a) należy podzielić wierzchołki grafu pełnego na dwa zbiory rozmiaru r i usunąć wszystkie krawędzie wewnątrz zbiorów. W przypadku (b) należy wybrać dowolne r wierzchołków z każdej klasy dwudzielności grafu $K_{2r,2r}$.

Teraz pokażemy, że (2) $\to$ (1). Zdefiniujmy $f(t) := g(\mathsf{R}(t))$, gdzie $\mathsf{R}(\cdot)$ jest liczbą Ramseya. Rozważmy dowolny graf $G \in \mathcal{G}$ o co najmniej $f(t) = g(\mathsf{R}(t))$ wierzchołkach. Z własności (2) wiemy, że G zawiera podgraf $K_{\mathsf{R}(t),\mathsf{R}(t)}$, niech X i Y będą klasami dwudzielności tego podgrafu.

Jeśli $G[X]$ lub $G[Y]$ zawiera t-elementowy podgraf pełny, jest to też oczywiście oszukany podgraf pełny w G. W przeciwnym przypadku, w definicji liczby Ramseya wiemy, że istnieją zbiory niezależne $X' \subseteq X$ i $Y' \subseteq Y$, każdy rozmiaru t. Zatem zbiór $X' \cup Y'$ indukuje w G podgraf $K_{t,t}$, co kończy dowód. $\square$