1. (10p.) Niech G będzie grafem k-regularnym i niech ϕ będzie jego poprawnym k-kolorowaniem krawędziowym. Niech $X \subseteq E(G)$ będzie minimalnym (pod względem inkluzji) krawędziowym zbiorem rozcinającym w G. Pokaż, że wszystkie zbiory $X \cap \phi^{-1}(i)$ dla $i \in [k]$ mają tę samą parzystość.

Rozwiązanie. Niech A będzie pewną składową grafu $G - X$. Zauważmy, że nie ma w X krawędzi o obu końcach w A: gdyby istniała taka krawędź $e \in X$, to A z dodaną krawędzią e jest składową grafu $G - (X \setminus \{e\})$, czyli X nie jest minimalnym zbiorem rozcinającym, sprzeczność.

Rozważmy dowolny kolor $i \in [k]$. Skoro graf G jest k-regularny, a ϕ jest poprawnym k-kolorowaniem, zbiór krawędzi $\phi^{-1}(i)$ jest skojarzeniem doskonałym w G. Zatem każdy wierzchołek z A jest incydentny z krawędzią w kolorze i: może być to krawędź, której oba końce leżą w A (nazwijmy je krawędziami typu 1; przypomnijmy sobie, że te krawędzie nie są w X) lub krawędź ze zbioru $X \cap \phi^{-1}(i)$ (nazwijmy je krawędziami typu 2). Zauważmy, że każda krawędź typu 1 jest incydentna z dokładnie dwoma wierzchołkami z A, a każda krawędź typu 2 jest incydentna z dokładnie jednym wierzchołkiem z A. Niech x będzie liczbą krawędzi typu 1. Podsumowując, otrzymujemy

$$|A| = 2x + |X \cap \phi^{-1}(i)|,$$

zatem parzystość $|A|$ jest taka sama jak parzystość zbioru $X \cap \phi^{-1}(i)$. Z dowolności wyboru koloru i otrzymujemy tezę. $\square$

2. (10p.) Niech $n \geqslant 3$. Pokaż, że dla każdego kolorowania krawędzi grafu K_n na czerwono i niebiesko istnieje w nim cykl Hamiltona, który składa się z co najwyżej dwóch monochromatycznych ścieżek (jednej czerwonej i jednej niebieskiej).

Rozwiązanie. Indukcja po n. Dla $n = 3$ mamy dwa przypadki: albo wszystkie trzy krawędzie mają ten sam kolor, albo dwie krawędzie są w jednym kolorze, a trzecia w innym. W obu przypadkach teza oczywiście zachodzi.

Rozważmy graf K_n i niech v będzie dowolnym wierzchołkiem K_n. Z założenia indukcyjnego wiemy, że dla każdego dwukolorowania krawędzi grafu $K_n - v$ istnieje cykl Hamiltona $C' = v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}, v_1$, który składa się z co najwyżej dwóch monochromatycznych ścieżek. Zauważmy, że dowolna permutacja wierzchołków grafu pełnego zawsze wyznacza cykl Hamiltona.

Jeśli C' składa się z jednej monochromatycznej ścieżki (wówczas jest to ścieżka zamknięta), krawędzie C' są w jednym kolorze (bez utraty ogólności – czerwonym). Wtedy szukany cykl Hamiltona w K_n to $C = v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}, v, v_1$. Istotnie, jeśli $v_{n-1}v, vv_1$ są czerwone, C składa się z jednej monochromatycznej ścieżki. W przeciwnym wypadku te z krawędzi $v_{n-1}v, vv_1$ które są niebieskie tworzą niebieską ścieżkę, pozostałe krawędzie z C tworzą czerwoną ścieżkę.

Jeśli C' składa się z dwóch monochromatycznych ścieżek, bez utraty ogólności możemy założyć, że kolejne wierzchołki niebieskiej ścieżki to $v_1, \ldots, v_k$, a kolejne wierzchołki czerwonej to $v_k, \ldots, v_{n-1}, v_1$, dla pewnego $k \in \{1, \ldots, n-1\}$ (zawsze możemy zmienić numery wierzchołków, aby ten warunek był spełniony).

Przypuśmy, że krawędź vv_1 jest czerwona. Wówczas szukany cykl Hamiltona to $C = v_1, v, v_2, \ldots, v_{n-1}, v_1$. Istotnie, jeśli krawędź vv_2 również jest czerwona, mamy w C czerwoną ścieżkę $v_k, \ldots, v_{n-1}, v_1, v, v_2$ i niebieską $v_2, \ldots, v_k$. W przeciwnym przypadku (vv_2 jest niebieska), mamy w C czerwoną ścieżkę $v_k, \ldots, v_{n-1}, v_1, v$ i niebieską $v, v_2, \ldots, v_k$.

Jeśli krawędź vv_1 jest niebieska, analogicznie rozumując możemy pokazać, że $C = v_1, v, v_{n-1}, \ldots, v_2, v_1$ jest szukanym cyklem Hamiltona. $\square$

3. (10p.) Znajdź wszystkie drzewa T, których dopełnienie $\overline{T}$ też jest drzewem.

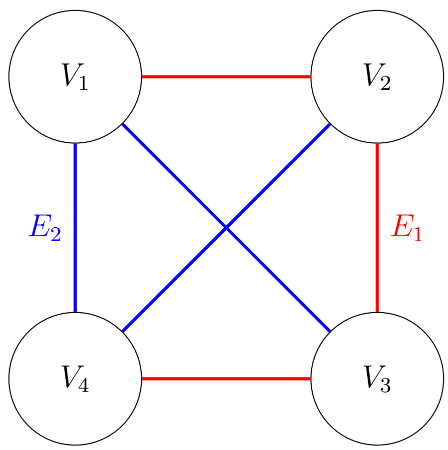
Rozwiązanie. Zauważmy, że $\overline{K_1} \cong K_1$, a $\overline{K_2}$ jest grafem niespójnym, więc nie jest drzewem.

Załóżmy teraz, że liczba wierzchołków drzewa jest równa co najmniej 3. Jeśli T ma co najmniej trzy liście, to w dopełnieniu $\overline{T}$ liście te indukują trójkąt, a więc $\overline{T}$ nie jest drzewem. Stąd wystarczy rozważyć jedynie drzewa o dwóch liściach. Jak wiadomo, takie drzewa to ścieżki. Niech $P_n = v_1 v_2 \ldots v_n$. Jeśli $n > 4$, to $\{v_1, v_3, v_n\}$ indukuje w $\overline{P_n}$ trójkąt, a więc znowu $\overline{P_n}$ nie jest drzewem. Pozostają do rozważenia drzewa P_3 i P_4. Jak można przekonać się bezpośrednio, $\overline{P_3}$ jest grafem niespójnym, a $\overline{P_4} \cong P_4$. Podsumowując - istnieją dwa drzewa, których dopełnienie również jest drzewem i są to drzewa K_1 i P_4. $\square$

4. (10p.) Niech $G = (V, E)$ będzie grafem takim, że $\chi(G) \leqslant 4$. Pokaż, że w E istnieją dwa rozłączne podzbiory E_1, E_2 takie, że $E_1 \cup E_2 = E$ (innymi słowy jest to podział E) i grafy (V, E_1) i (V, E_2) są dwudzielne.

Rozwiązanie. Ustalmy poprawne kolorowanie $c : V \to [4]$ grafu G, takie istnieje, bo $\chi(G) \leqslant 4$. Dla $i \in [4]$, niech V_i będzie zbiorem wierzchołków G, które w tym kolorowaniu mają kolor i. Oczywiście każdy z tych zbiorów jest zbiorem niezależnym. Zdefiniujmy teraz E_1 jako zbiór wszystkich krawędzi, które są pomiędzy: (i) V_1 i V_2, (ii) V_2 i V_3, lub (iii) V_3 i V_4. Natomiast E_2 zdefiniujmy jako zbiór krawędzi między: (i) V_3 i V_1, (ii) V_1 i V_4, lub (iii) V_4 i V_2. Zauważmy, że tak zdefiniowane zbiory E_1 i E_2 są rozłączne oraz pokrywają cały zbiór E, ponieważ nie ma krawędzi wewnątrz zbiorów V_i dla $i \in [4]$. Oznaczmy $G_1 = (V, E_1)$ i $G_2 = (V, E_2)$.

Pozostaje pokazać, że G_1 i G_2 są dwudzielne. Niech $X_1 := V_2 \cup V_4$, $X_2 := V_2 \cup V_1$, $Y_1 := V_1 \cup V_3$, $Y_2 := V_3 \cup V_4$. Zauważmy, że wewnątrz zbiorów X_1 i Y_1 nie ma żadnej krawędzi z E_1, a wewnątrz X_2 a Y_2 nie ma żadnej krawędzi z E_2. Zatem umiemy podzielić V na dwa zbiory niezależne w G_1 i umiemy podzielić V na dwa zbiory niezależne w G_2. Czyli oba te grafy są dwudzielne. $\square$



5. (10p.) W pewnym mieście, na którego krańcach znajdują się dwa garaże dla pługów śnieżnych, x i y, chcemy zaplanować trasę pługów z x do y. Po drodze musimy odwiedzić ulice zgłoszone do odśnieżenia, a mamy do dyspozycji tylko k pługów.

Formalnie, mamy dany graf skierowany $G = (V, A)$, dwa wierzchołki $x, y \in V$, podzbiór $M \subseteq A$ oraz liczbę naturalną k. Chcemy stwierdzić, czy w grafie G istnieje zbiór $\mathcal{D}$ skierowanych x-y ścieżek taki, że $|\mathcal{D}| \leqslant k$ oraz dla każdego łuku $m \in M$ istnieje co najmniej jedna ścieżka w $\mathcal{D}$, która przechodzi przez m.

Zaproponuj algorytm rozwiązujący ten problem poprzez sprowadzenie go do jednego z problemów omawianych na ćwiczeniach.

Rozwiązanie. Pokażemy, że ten problem można sprowadzić do problemu istnienia cyrkulacji z dolnymi i górnymi ograniczeniami na przepływy na łukach – zadanie 8.5 b).

Zdefiniujmy graf $G' = (V', A')$ taki, że $V' = V \cup \{x'\}$ oraz $A' = A \cup \{(x', x), (y, x')\}$. Zdefiniujmy również funkcje ℓ (dolne ograniczenia na przepływ) i c (górne ograniczenia na przepływ) następująco:

$$\ell(a) = \begin{cases} 1 \text{ dla } a \in M, \\ 0 \text{ w p.p.} \end{cases} \qquad \text{oraz } c(a) = \begin{cases} k \text{ dla } a \in \{(x', x), (y, x')\}, \\ \infty \text{ dla } a \in A, \end{cases}$$

Pokażemy teraz, że problem istnienia cyrkulacji w tak skonstruowanym grafie G' jest równoważny istnieniu zbioru $\mathcal{D}$ o własnościach jak w zadaniu.

Najpierw przypuśćmy, że istnieje cyrkulacja $f : A' \to [0, \infty)$. Przypomnijmy sobie, że możemy założyć, że wartości funcji f są całkowite (analogicznie jak z przepływami). Łuki z A, dla których f jest równe i będziemy traktować jako krawędzie, przez które przechodzi dokładnie i ścieżek z $\mathcal{D}$. Zauważmy, że przydzielenie tych krawędzi skierowanym x-y ścieżkom nie jest jednoznaczne, ale jest możliwe ze względu na warunek Kirchoffa, tzn. dla każdego wierzchołka $v \in V \setminus \{x, y\}$ wchodzi do niego tyle samo ścieżek, co wychodzi. Ponadto, $|\mathcal{D}| \leqslant k$, ponieważ liczba x-y ścieżek jest równa co najwyżej $f^+(x) - \sum_{(u,x) \in A} f(u, x)$, a to z warunku Kirchoffa jest równe $f(x', x) \leqslant c(x', x) = k$. Zauważmy też, że każdy łuk $m \in M$ spełnia $\ell(m) = 1$, więc należy on do przynajmniej jednej ścieżki w $\mathcal{D}$. Zatem jeśli istnieje cyrkulacja, to istnieje też zbiór $\mathcal{D}$ o wymaganych własnościach.

Przypuśćmy teraz, że istnieje żądany zbiór ścieżek $\mathcal{D}$. Dla każdego łuku $a \in A$ definiujemy $f(a)$ jako i jeśli a należy do dokładnie i ścieżek z $\mathcal{D}$, gdzie $i \in \{0, \ldots, k\}$. Następnie definiujemy $f(y, x') = f(x', x) = f^+(x) - f^-(x)$.

Pokażemy teraz, że f jest cyrkulacją. Zauważmy, że do każdego wierzchołka $v \in V \setminus \{x, y\}$ musi wchodzić tyle ścieżek z $\mathcal{D}$, co wychodzi, a te wartości są odpowiednio równe $f^-(v)$ i $f^+(v)$, więc warunek Kirchoffa jest spełniony dla każdego takiego wierzchołka. Dla wierzchołków x, x' warunek Kirchoffa zachodzi z definicji funkcji f. Ponadto ten warunek zachodzi również dla y, ponieważ $f(y, x')$ jest równe liczności zbioru $\mathcal{D}$, a to jest równe $f^-(y) - \sum_{(y,u) \in A} f(y, u)$. Pozostaje sprawdzić funkcje c i ℓ. Z definicji c, dla łuków $a \in A$ zachodzi $f(a) \leqslant c(a)$. Dla (x', x) i (y, x') wartości f na tych łukach to liczba ścieżek z $\mathcal{D}$ zatem nie przekraczają one $k = c(x', x) = c(y, x')$. Dla każdego łuku $a \in A \setminus M$ zachodzi $f(m) \geqslant \ell(m)$ z definicji ℓ. Natomiast dla łuków $m \in M$ własność $f(m) \geqslant \ell(m)$ wynika z faktu, że był on odwiedzony przez przynajmniej jedną ścieżkę z $\mathcal{D}$. Zatem pokazaliśmy, że f jest cyrkulacją, co kończy dowód. $\square$