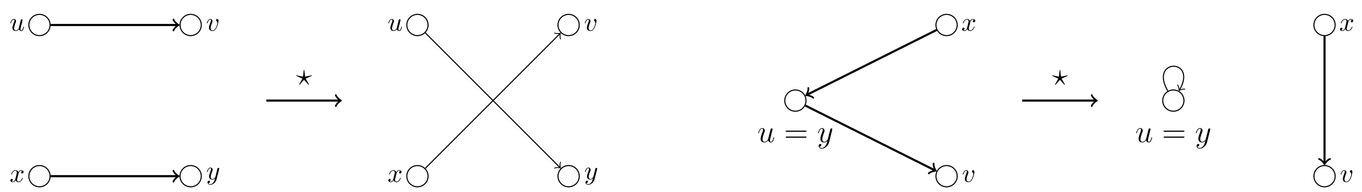
1. (10p.) Niech $k \in \mathbb{N}$ i niech G będzie grafem pełnym o $2^{2k} \cdot (k-1) + 2k + 1$ wierzchołkach. Pokaż, że w dowolnym kolorowaniu krawędzi grafu G na czerwono i niebiesko, oraz dla dowolnego zbioru $X \subseteq V(G)$ liczności $2k$ istnieje jednokolorowa kopia $K_{k,k}$ taka, że jedna z klas dwudzielności jest zawarta w X.

Przypomnijmy, że $K_{k,k}$ to graf pełny dwudzielny o obu klasach dwudzielności liczności k.

Rozwiązanie. Ustalmy dowolne kolorowanie krawędzi G na czerwono i niebiesko. Niech $X \subseteq V(G)$ będzie taki, że $|X| = 2k$. W grafie $G - X$ mamy $2^{2k} \cdot (k-1) + 1$ wierzchołków. Zauważmy, że dla każdego $v \in V(G) \setminus X$ krawędzie z v do X mogą być pokolorowane na 2^{2k} sposobów. Zatem z zasady szufladkowej Dirichleta w $V(G) \setminus X$ musi istnieć zbiór Y liczności k taki, że wszystkie wierzchołki z Y swoje krawędzie do X mają pokolorowane w taki sam sposób. Ponadto, dla dowolnego $v \in Y$ co najmniej połowa krawędzi z v do X, czyli co najmniej k krawędzi musi być w tym samym kolorze, przyjmijmy bez straty ogólności, że jest to kolor niebieski. To znaczy, że istnieje podzbiór X' zbioru X taki, że wszystkie krawędzie pomiędzy v a X' są niebieskie oraz $|X'| = k$. Ponieważ wszystkie wierzchołki z Y miały pokolorowane w ten sam sposób krawędzie do X, to wszystkie krawędzie z Y do X' są niebieskie, a więc otrzymujemy niebieską kopię $K_{k,k}$, której klasy dwudzielności to $X' \subseteq X$ i Y, co kończy dowód. $\square$

2. (10p.) Niech $N = (G, s, t, c)$ będzie siecią taką, że wartość największego przepływu w N oraz wartość największego przepływu w $N' = (G, t, s, c)$ są niezerowe. Dla dwóch różnych łuków $(u, v), (x, y) \in A(G)$ definiujemy operację $\star$, która zamienia te łuki na (u, y) i (x, v), tj.

- usuwamy łuki (u, v) i (x, y) z G,
- dodajemy, o ile ich wcześniej nie było, łuki (u, y) i (x, v),
- przepustowość na nowych łukach (u, y) i (x, v) definiujemy odpowiednio jako $c(u, v)$ i $c(x, y)$.



Pokaż, że istnieje taka para łuków w G, że po zastosowaniu operacji $\star$ do sieci N i tej pary łuków, wartość największego przepływu w N się zmniejszy.

Rozwiązanie. Niech $K = (S, \overline{S})$ będzie najmniejszym przekrojem w N. Ponieważ wartość największego przepływu w N jest niezerowa, to przepustowość tego przekroju jest niezerowa, czyli istnieje łuk (u, v) z S do $\overline{S}$ o niezerowej przepustowości. Analogicznie, rozważając przekrój $K' = (\overline{S}, S)$ w sieci N', w której także wartość największego przepływu jest niezerowa i tym samym nie ma przekrojów o zerowej przepustowości, możemy znaleźć łuk (x, y) z $\overline{S}$ do S o niezerowej przepustowości. Zastosujmy operację $\star$ do łuków (u, v) i (x, y). Spójrzmy, jak zmieni się przepustowość przekroju $(S, \overline{S})$ w N.

Operacja $\star$ usunie łuk (u, v) z przekroju $(S, \overline{S})$. Nowe łuki, które mogą powstać, to (u, y) i (x, v), ale pierwszy zawarty jest w S a drugi w $\overline{S}$, więc nie mogą należeć do przekroju. Zatem operacja $\star$ usunie łuk z przekroju K, ale nie doda żadnych nowych. Ponieważ przepustowość łuku (u, v) jest niezerowa, to przepustowość przekroju $(S, \overline{S})$ się zmniejszy, stąd też przepustowość najmniejszego przekroju w N się zmniejszy, co znaczy, że również wartość największego przepływu N się zmniejszy. $\square$

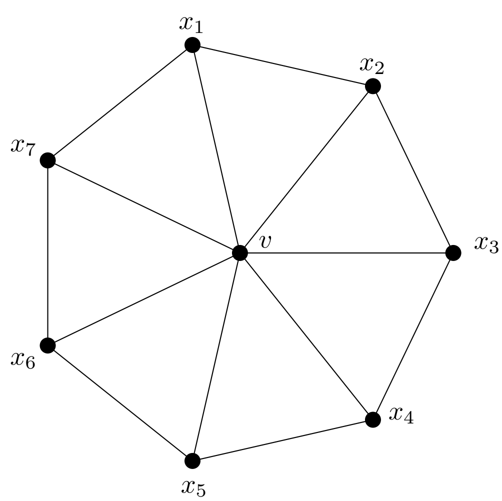
3. (10p.) Niech G będzie maksymalnym grafem planarnym o co najmniej trzech wierzchołkach, który nie jest eulerowski. Wyznacz $\chi(G)$.

Rozwiązanie. Wiemy, że G jest grafem planarnym, więc z twierdzenia o czterech kolorach dostajemy, że $\chi(G) \leqslant 4$. Ustalmy zatem dowolne poprawne kolorowanie f grafu G na $\chi(G)$ kolorów. Pokażemy, że używa ono co najmniej czterech kolorów.

Skoro G nie jest eulerowski, to z twierdzenia Eulera wiemy, że nie jest spójny lub ma wierzchołek nieparzystego stopnia. Jeśli nie jest spójny, wówczas ustalmy pewien płaski rysunek G i rozważmy wierzchołki v_1 i v_2, które leżą na zewnętrznej ścianie, ale należą do dwóch różnych spójnych składowych grafu G. Możemy wówczas dołożyć krawędź v_1v_2 do rysunku, a otrzymany graf wciąż będzie planarny, co daje sprzeczność z maksymalnością G. Zatem G jest spójny.

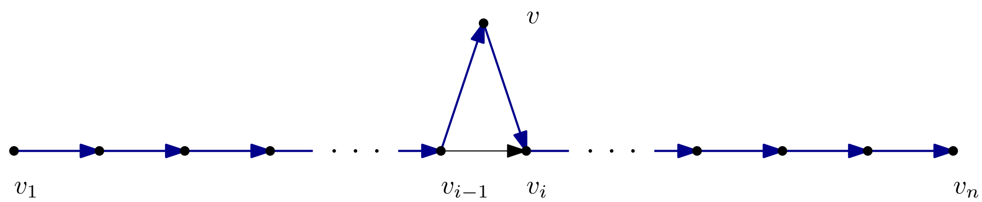
W takim razie w G musi istnieć wierzchołek nieparzystego stopnia, nazwijmy go v. Graf G ma co najmniej trzy wierzchołki i jest maksymalny, więc wiemy z ćwiczeń, że G jest triangulacją. Skoro tak, to $d = |N(v)| \geqslant 2$. Z kolei skoro v jest nieparzystego stopnia, to $d \geqslant 3$. Ustalmy pewien rysunek płaski grafu G. Oznaczmy przez x_1 dowolnego sąsiada v, a przez $x_2, \ldots, x_d$ kolejnych jego sąsiadów, ponumerowanych zgodnie z kierunkiem wskazówek zegara na naszym rysunku G (na rysunku poniżej przykład dla $d = 7$). Skoro G jest triangulacją, wszystkie krawędzie postaci x_ix_{i+1} dla $i \in [d-1]$ oraz x_dx_1 muszą istnieć. Zatem podgraf G indukowany przez te krawędzie to cykl długości nieparzystej, nazwijmy go C. Oczywiście w kolorowaniu f na wierzchołkach $V(C)$ muszą pojawić się co najmniej trzy kolory. Ale skoro wierzchołek v sąsiaduje ze wszystkimi wierzchołkami z $V(C)$, musi mieć inny kolor niż każdy z tych wierzchołków, więc f używa co najmniej czterech kolorów, czyli $\chi(G) \geqslant 4$.

Z faktów, że $\chi(G) \leqslant 4$ oraz $\chi(G) \geqslant 4$ otrzymujemy $\chi(G) = 4$. □



4. (10p.) Graf skierowany $G = (V, E)$ nazywamy *turniejem* jeśli dla każdej pary wierzchołków $u, v \in V$ zachodzi dokładnie jedno: $(u, v) \in E$ albo $(v, u) \in E$. Pokaż, że każdy turniej ma skierowaną ścieżkę Hamiltona (czyli ścieżkę odwiedzającą każdy wierzchołek dokładnie raz, gdzie między kolejnymi wierzchołkami przechodzimy zgodnie z kierunkami krawędzi).

Rozwiązanie. Rozważmy turniej $G = (V, E)$ i przez n oznaczmy liczbę jego wierzchołków. Indukcja po n. Jeśli $n = 1$, twierdzenie jest oczywiście spełnione. Załóżmy zatem, że $n \geqslant 2$ i każdy turniej o mniej niż n wierzchołkach ma skierowaną ścieżkę Hamiltona. Wybierzmy dowolny wierzchołek $v \in V$ i rozważmy graf $G' := G - v$. Jest on turniejem o $n - 1$ wierzchołkach, więc z założenia indukcyjnego ma skierowaną ścieżkę Hamiltona. Oznaczmy jej kolejne wierzchołki przez $v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}$. Jeśli krawędź łącząca v i v_1 jest skierowana od v do v_1, to $v, v_1, \ldots, v_{n-1}$ jest skierowaną ścieżką Hamiltona w G. Analogicznie, jeśli krawędź łącząca v i v_{n-1} jest skierowana od v_{n-1} do v, to $v_1, \ldots, v_{n-1}, v$ jest skierowaną ścieżką Hamiltona w G. Załóżmy zatem, że $(v_1, v), (v, v_{n-1}) \in E$. Niech i będzie najmniejszym indeksem takim, że $(v, v_i) \in E$. Taki indeks istnieje, bo $(v, v_{n-1}) \in E$, oraz $i \geqslant 2$, bo $(v_1, v) \in E$. Z minimalności i wiemy, że $(v_{i-1}, v) \in E$. Zatem $v_1, \ldots, v_{i-1}, v, v_i, \ldots, v_n$ jest skierowaną ścieżką Hamiltona w G (patrz rysunek poniżej), co kończy dowód. □



5. (10p.) Pokaż, że krawędź w grafie jest mostem wtedy i tylko wtedy, gdy nie należy do żadnego cyklu.

Rozwiązanie. ($\rightarrow$) Przypuśćmy, że krawędź xy jest mostem w grafie G, ale należy do pewnego cyklu C. Skoro xy jest mostem, graf $G - xy$ ma dwie składowe X i Y, takie że X zawiera x i Y zawiera y. Ale zauważmy, że $C - xy$ jest x-y-ścieżką w grafie $G - xy$, sprzeczność.

($\leftarrow$) Przypuśćmy, że krawędź xy nie jest mostem; pokażemy, że należy do pewnego cyklu. Skoro krawędź nie jest mostem, w grafie $G - xy$ istnieje x-y-ścieżka P. Po dodaniu krawędzi xy to P otrzymujemy cykl zawierający krawędź xy. $\square$

Definicje, twierdzenia, wzory.

G jest grafem o zbiorze wierzchołków V i zbiorze krawędzi E. Oznaczamy $n := |V|$ i $m := |E|$. Dla $X \subseteq V$ przez $G[X]$ oznaczamy podgraf G indukowany przez zbiór X, czyli $(X, \{e \in E \mid e \subseteq X\})$.

Spójność.

Def. Graf jest **spójny**, jeśli dla dowolnych dwóch wierzchołków u, v istnieje u-v-ścieżka. Graf jest **k-spójny**, jeśli $|G| > k$ i dla każdego $V' \subseteq V$, $|V'| < k$ graf $G - V'$ jest spójny. Graf jest **k-spójny krawędziowo**, jeśli $|E| > 0$ i dla każdego $X \subseteq E$, $|X| < k$ graf $G - X$ jest spójny.
Def. Spójność wierzchołkowa, ozn. $\kappa(G)$ – największe k, dla którego graf jest k-spójny.
Def. Spójność krawędziowa, ozn. $\kappa'(G)$ – największe k, dla którego graf jest krawędziowo k-spójny.
Nierówność Whitneya. $\kappa(G) \leqslant \kappa'(G) \leqslant \delta(G)$.
Tw. Mengera 1. Dla dowolnych $A, B \subseteq V$, niech k będzie rozmiarem najmniejszego A-B-separatora. W G istnieje k rozłącznych $A - B$ ścieżek.
Tw. Mengera 2. Graf G jest k-spójny wtw. gdy dla każdej pary wierzchołków u, v istnieje k wewnętrznie rozłącznych u-v ścieżek.
Tw. Mengera 3. Graf G jest k-spójny wtw. gdy dla każdego $x \in V$ i $U \in V \setminus \{x\}$, $|U| = k$, istnieje x-U-wachlarz, czyli k wew. rozłącznych ścieżek o początku w x i końcach w różnych wierzchołkach z U.
Tw. Mengera 4. Graf G jest k-spójny krawędziowo wtw. gdy dla każdej pary wierzchołków u, v istnieje k krawędziowo rozłącznych u-v ścieżek.

Obwód Eulera.

Tw. Eulera (wersja z obwodem). Multigraf spójny ma obwód Eulera wtw. gdy każdy wierzchołek ma stopień parzysty.
Tw. Eulera (wersja z drogą). Multigraf spójny ma drogę Eulera wtw. gdy liczba wierzchołków stopnia nieparzystego jest mniejsza lub równa 2.

Cykl Hamiltona.

Warunek konieczny. Jeśli G ma cykl Hamiltona, to dla każdego $S \subseteq V$, $S \neq \emptyset$ graf $G - S$ ma co najwyżej $|S|$ spójnych składowych.
Tw. Diraca (warunek dostateczny). Jeśli G jest prosty i $n \geqslant 3$ oraz dla każdego $v \in V$ zachodzi $\deg(v) \geqslant \frac{n}{2}$, to G jest hamiltonowski.
Tw. Orego (warunek dostateczny). Jeśli G jest prosty i $n \geqslant 3$ oraz dla każdych u, v takich, że $uv \notin E$, zachodzi $\deg(u) + \deg(v) \geqslant n$, to G jest hamiltonowski.

Kolorowanie krawędzi.

Tw. Vizinga. $\Delta(G) \leqslant \chi'(G) \leqslant \Delta(G) + 1$.

Kolorowanie wierzchołków.

Def. Zbiór niezależny – zbiór wierzchołków takich, że żadne dwa nie są połączone krawędzią.
Def. Graf G jest **krytyczny**, jeśli dla każdego jego właściwego podgrafu H zachodzi $\chi(H) < \chi(G)$. Graf jest **k-krytyczny**, jeśli jest krytyczny i $\chi(G) = k$.
Lemat. Jeśli G jest k-krytyczny, to $\delta(G) \geqslant k - 1$.
Tw. $\chi(G) \leqslant \Delta(G) + 1$ (algorytm zachłanny).
Tw. Brooksa Jeśli graf spójny G nie jest nieparzystym cyklem ani grafem pełnym, to $\chi(G) \leqslant \Delta(G)$.
Tw Mycielskiego. Dla każdego k istnieje graf G_k bez trójkątów taki, że $\chi(G_k) = k$.
Def. Talią grafu nazywamy długość najkrótszego cyklu w tym grafie.
Tw. Erdősa Dla dowolnych $k, \ell \in \mathbb{N}$ istnieje graf G taki, że $\chi(G) \geqslant k$ i talia grafu G jest co najmniej ℓ.

Skojarzenia.

Def. Skojarzeniem nazywamy zbiór rozłącznych krawędzi grafu. Skojarzeniem **maksymalnym** nazywamy skojarzenie, które nie jest podzbiorem żadnego innego skojarzenia. Skojarzeniem **doskonałym** nazywamy skojarzenie, które pokrywa każdy wierzchołek.
Def. Ścieżką naprzemienną względem skojarzenia M nazywamy ścieżkę, której krawędzie na przemian należą i nie należą do M. Ścieżka jest **powiększająca** względem skojarzenia M, jeśli jest naprzemienna względem M oraz zaczyna i kończy się w wierzchołku niepokrytym przez M.
Tw. Berge'a. Skojarzenie M jest największe wtw, gdy nie ma ścieżki powiększającej względem M.
Tw. Halla. Niech G będzie grafem dwudzielnym o klasach dwudzielności X, Y. W G istnieje skojarzenie pokrywające X wtw, gdy dla każdego $X' \subseteq X$ zachodzi $|N(X')| \geqslant |X'|$.

Sieci i przepływy.

Niech $N = (G, c, s, t)$ będzie siecią, $G = (V, A)$. Dla funkcji $f : A \to \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ definiujemy:

- Dla $v \in V$: $f^+(v) := \sum_{u: vu \in A} f(vu)$ i $f^-(v) := \sum_{u: uv \in A} f(uv)$
- Dla $S \subseteq V$: $f^+(S) := \sum_{\substack{uv \in A \\ u \in S \\ v \notin S}} f(uv)$ i $f^-(S) := \sum_{\substack{vu \in A \\ u \in S \\ v \notin S}} f(vu)$

Def. Funkcję $f : A \to \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ nazywamy **przepływem**, jeśli dla każdego $a \in A$ zachodzi $f(a) \leqslant c(a)$ oraz dla każdego $v \in V \setminus \{s, t\}$ zachodzi $f^+(v) = f^-(v)$.
Def. Wartość przepływu f to $\operatorname{val} f := f^+(s) - f^-(s)$.
Fakt. $f^+(s) - f^-(s) = f^-(t) - f^+(t)$.
Def. Dla dowolnego $S \subseteq V$ takiego, że $s \in S$ i $t \in \overline{S} := V \setminus S$, **przekrojem** $(S, \overline{S})$ nazywamy zbiór krawędzi o początku w S i końcu w $\overline{S}$. **Przepustowością** przekroju $K = (S, \overline{S})$ nazywamy $\operatorname{cap} K := \sum_{a \in K} c(a)$.
Lemat. Dla dowolnego przepływu f i dowolnego przekroju $\left(S, \overline{S}\right)$ zachodzi $\operatorname{val} f = f^+(S) - f^-(S)$.
Tw. Dla dowolnego przepływu f i dowolnego przekroju K zachodzi $\operatorname{val} f \leqslant \operatorname{cap} K$. Jeśli $\operatorname{val} f = \operatorname{cap} K$, to f jest największym przepływem, a K najmniejszym przekrojem.
Def. Dla ścieżki P (niekoniecznie skierowanej), przepływu f i łuku a z P definujemy:

$$r(a) = \begin{cases} c(a) - f(a) & \text{jeśli } a \text{ jest krawędzią w przód,} \\ f(a) & \text{jeśli } a \text{ jest krawędzią w tył.} \end{cases}$$

Dla ścieżki P definiujemy $r(P) := \min\limits_{a \text{ - łuk } P} r(a)$.

Ścieżka P jest **powiększająca** jeśli jest s-t ścieżką i $r(P) > 0$. Wówczas można zdefiniować przepływ $\hat{f}(a)$ jako:

$$\hat{f}(a) = \begin{cases} f(a) + r(P), & \text{jeśli } a \in A(P) \text{ jest łukiem w przód,} \\ f(a) - r(P), & \text{jeśli } a \in A(P) \text{ jest łukiem w tył} \\ f(a), & \text{jeśli } a \notin A(P). \end{cases}$$

Tw. Forda-Fulkersona. Przepływ f jest największy wtw. gdy nie ma ścieżki powiększającej.
Wniosek Jeśli f^* jest największym przepływem, a $\widetilde{K}$ najmniejszym przekrojem, to $\operatorname{cap} \widetilde{K} = \operatorname{val} f^*$.

Planarność.

Tw. Kuratowskiego. Graf G jest planarny wtw. gdy nie zawiera podpodziału $K_{3,3}$ lub K_5.
Tw. Dla grafu płaskiego G zachodzi $\sum_{f \in F(G)} \deg_G f = 2m$, gdzie przez $F(G)$ oznaczamy zbiór regionów (ścian) grafu płaskiego G.
Formuła Eulera. Dla spójnego grafu płaskiego G zachodzi $n - m + |F(G)| = 2$.
Lemat. Dla prostego grafu planarnego G o $n \geqslant 3$ wierzchołkach i talii k zachodzi $m \leqslant k(n-2)/(k-2)$.
Wniosek. Dla prostego grafu planarnego G o $n \geqslant 3$ wierzchołkach zachodzi $m \leqslant 3n - 6$.
Wniosek. Każdy graf planarny ma wierzchołek stopnia co najwyżej 5.
Tw. o czterech kolorach. Jeśli G jest planarny, to $\chi(G) \leqslant 4$.
Def. Dla grafu płaskiego G, jego **grafem dualnym** G^* nazywamy graf, którego wierzchołkami są regiony G i istnieje bijekcja między $E(G^*)$ a $E(G)$: krawędź e^* łączy dwa wierzchołki f_1, f_2 w G^* wtw, gdy odpowiadająca jej krawędź e z G jest incydentna z f_1 i f_2.

Teoria Ramseya.

Def. Liczba Ramseya, ozn. $R(t)$, to najmniejsze n takie, że przy dowolnym dwukolorowaniu krawędzi K_n znajdziemy jednokolorową kopię K_t.
Przez $R(s, t)$ oznaczamy najmniejsze n takie, że przy dowolnym kolorowaniu K_n na czerwono i niebiesko znajdziemy czerwoną kopię K_s lub niebieską K_t.
Tw. Ramseya (Erdősa-Szekeresa). Dla każdego t zachodzi $R(t) \leqslant 4^t$.
Tw. Erdősa. Dla $t \geqslant 3$ zachodzi $R(t) > 2^{t/2}$.
Tw. Dla $s, t > 1$ zachodzi $R(s, t) \leqslant R(s, t-1) + R(s-1, t)$.
Wniosek. Dla $s, t \geqslant 1$ zachodzi $R(s, t) \leqslant \binom{s+t-2}{s-1} = \binom{s+t-2}{t-1}$.