1. (10p.) Graf skierowany nazywamy *turniejem przechodnim*, jeśli można jego wierzchołki uporządkować w taki sposób, że pomiędzy każdą parą wierzchołków istnieje dokładnie jeden łuk: od wierzchołka o mniejszym numerze do wierzchołka o większym numerze. Pokaż, że dla każdego k istnieje n o następującej własności: w każdym n-wierzchołkowym grafie skierowanym istnieje zbiór niezależny rozmiaru k lub turniej przechodni (jako podgraf) o k wierzchołkach.

Rozwiązanie. Niech $n = R(k, k, k)$, czyli to najmniejsza liczba, dla której przy każdym kolorowaniu krawędzi n-wierzchołkowego grafu pełnego na trzy kolory istnieje jednokolorowa klika o k wierzchołkach.

Niech $G = (V, A)$ będzie grafem skierowanym o n wierzchołkach. Oznaczmy jego wierzchołki przez $1, 2, \ldots, n$. Teraz zbudujmy graf pełny o wierzchołkach $V = [n]$ i pokolorujmy jego krawędzie następująco:

- jeśli $i < j$ i $(i, j) \in A$, to krawędź ij jest pokolorowana na czerwono,
- jeśli $i < j$ i $(i, j) \notin A$, ale $(j, i) \in A$, to krawędź ij jest pokolorowana na niebiesko,
- jeśli $i < j$ i $(i, j), (j, i) \notin A$, to krawędź ij jest pokolorowana na bursztynowo.

W ten sposób każda krawędź grafu pełnego dostała dokładnie jeden kolor. Z definicji liczby $R(k, k, k)$ wiemy, że istnieje jednokolorowa klika.

Zauważmy, że klika bursztynowa odpowiada zbiorowi niezależnemu w G. Klika czerwona odpowiada turniejowi przechodniemu w G (kolejność wierzchołków w tym turnieju jest zgodna z numerami wierzchołków kliki). Klika niebieska także odpowiada turniejowi przechodniemu w G (kolejność wierzchołków w tym turnieju jest odwrotna względem numeracji wierzchołków kliki). To pokazuje, że $n = R(k, k, k)$ ma wymaganą własność. $\square$

2. (10p.) Niech G będzie grafem bez cykli długości co najmniej 4. Pokaż, że $\chi(G) \leqslant 3$.

Rozwiązanie 1. Zauważmy, że bez straty ogólności można założyć, że G jest spójny. Niech k oznacza liczbę bloków w G. Indukcja po k.

Jeśli $k = 1$, to graf G (a) jest pełny lub (b) nie jest pełny, ale jest dwuspójny. W przypadku (a), jeśli G ma co najwyżej 3 wierzchołki, to $\chi(G) \leqslant 3$, a jeśli ma o najmniej 4 wierzchołki, to zawiera cykl C_4, sprzeczność. Rozważmy więc przypadek (b) i weźmy dwa niesąsiadujące wierzchołki z G, nazwijmy je x i y. Skoro G jest dwuspójny, musi w nim istnieć cykl c zawierający x i y. Wierzchołki te nie sąsiadują, więc C ma co najmniej cztery wierzchołki, sprzeczność. Zatem dla $k = 1$ zawsze mamy $\chi(G) \leqslant 3$.

Teraz przypuśćmy, że $k > 1$ i twierdzenie jest prawdziwe dla każdego grafu o mniejszej liczbie bloków. Skoro $k > 1$, to G ma wierzchołek rozcinający, nazwijmy go v. Niech A będzie zbiorem wierzchołków pewnej składowej grafu $G - v$. Przez G_1 oznaczmy graf $G[A \cup \{v\}]$, zaś przez G_2 graf $G - A$. Każdy z nich ma mniej bloków niż k, więc z założenia indukcyjnego każdy z nich ma poprawne 3-kolorowanie, oznaczmy je f_1 (dla G_1) i f_2 (dla G_2). Dokonując permutacji kolorów, możemy założyć, że $f_1(v) = f_2(v)$. Wtedy funkcja $f : V(G) \to \{1, 2, 3\}$

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{jeśli } x \in A, \\ f_2(x) & \text{jeśli } x \notin A \end{cases}$$

jest poprawnym 3-kolorowaniem grafu G. Zatem, na mocy indukcji otrzymujemy tezę twierdzenia.

Rozwiązanie 2 (tak naprawdę to samo, tylko trochę inaczej). Przypuśćmy przeciwnie, więc niech $\chi(G) \geqslant 4$. Z zajęć wiemy, że G zawiera podgraf k-krytyczny, gdzie $k \geqslant 4$. Nazwijmy go G'. Z zadania z ćwiczeń wiemy, że G' jest dwuspójny, a z wykładu, że ma co najmniej $k \geqslant 4$ wierzchołków. Zauważmy też, że z założenia o G, graf G' nie ma cykli długości co najmniej 4.

Jeśli G' jest grafem pełnym, to zawiera podgraf C_4, sprzeczność. Weźmy zatem dwa niesąsiadujące wierzchołki z G', nazwijmy je x i y. Skoro G' jest dwuspójny, musi w nim istnieć cykl c zawierający x i y. Wierzchołki te nie sąsiadują, więc C ma co najmniej cztery wierzchołki, sprzeczność.

Rozwiązanie 3 (dziękuję JP). Przypomnijmy sobie z zadania z ćwiczeń, że graf jest zewnętrznie planarny, wtedy i tylko wtedy, gdy nie zawiera jako podpodziału grafu K_4 ani grafu $K_{2,3}$. Zauważmy, że jeśli graf nie ma cykli długości co najmniej 4, to z pewnością nie zawiera takich podpodziałów, czyli jest zewnętrznie planarny. Dokładając twierdzenie z dodatkowego wykładu, że każdy graf zewnętrznie planarny ma poprawne 3-kolorowanie, otrzymujemy tezę. $\square$

3. (10p.) Niech G będzie grafem spójnym o co najmniej 3 wierzchołkach, którego każdy wierzchołek ma stopień parzysty. Pokaż, że $L(G)$ ma skojarzenie rozmiaru co najmniej $\lfloor |V(G)|/2 \rfloor$.

Przypomnijmy, że przez $L(G)$ oznaczamy graf o zbiorze wierzchołków $E(G)$, taki że $e, f \in E(G)$ tworzą krawędź w $L(G)$, jeśli mają wspólny koniec w G.

Rozwiązanie. Skoro G jest grafem spójnym, w którym każdy wierzchołek ma stopień parzysty, to z twierdzenia Eulera wiemy, że istnieje w nim obwód Eulera. Oznaczmy jego kolejne krawędzie przez $e_1, e_2, \ldots, e_m$.

Dla każdego nieparzystego $i \in [m-1]$ niech $f_i = e_i e_{i+1}$, i niech $M = \{f_i \mid i \in [m-1], 2 \nmid i\}$. Ponieważ e_i oraz e_{i+1} są kolejnymi krawędziami obwodu Eulera, $M \subseteq E(L(G))$, oraz każdy wierzchołek $e \in V(L(G))$ należy do co najwyżej jednej krawędzi w M. Oznacza to, że M jest skojarzeniem w $L(G)$. Zauważmy, że $|M| = \lfloor |E(G)|/2 \rfloor$.

Pozostaje sprawdzić, że $|M| \geqslant \lfloor |V(G)|/2 \rfloor$. Skoro G jest spójny, ma co najmniej 3 wierzchołki i każdy wierzchołek ma stopień parzysty, z każdego wierzchołka wychodzą co najmniej dwie krawędzie. Z lematu o uściskach dłoni dostajemy, że wówczas $|E(G)| \geqslant |V(G)|$, więc $|M| = \lfloor |E(G)|/2 \rfloor \geqslant \lfloor |V(G)|/2 \rfloor$, co kończy dowód. $\square$

4. (10p.) Dla grafu skierowanego G i dowolnego wierzchołka v, przez $\deg^+_G(v)$ (odpowiednio, $\deg^-_G(v)$) oznaczamy liczbę łuków wychodzących z v (odpowiednio, wchodzących do v).

Niech $G = (V, A)$ będzie grafem skierowanym. Niech G' będzie grafem powstałym z G przez dodanie wierzchołków s, t oraz wszystkich łuków $(s, v), (v, t)$ dla $v \in V$. Rozważmy sieć $N = (G', c, s, t)$, gdzie $c(a) = 1$ dla $a \in A$, oraz $c(s, v) = \deg^+_G(v)$ i $c(v, t) = \deg^-_G(v)$ dla każdego $v \in V$. Wyznacz wartość największego przepływu w N.

Rozwiązanie. Pokażemy, że wartość największego przepływu w N jest równa $|A|$. Rozważmy przekrój $(\{s\}, V \setminus \{s\})$. Przepustowość tego przekroju wynosi $\sum_{v\in V} c(s, v) = \sum_{v\in V} \deg^+_G(v)$. Zauważmy, że suma stopni wychodzących z V jest równa dokładnie $|A|$. Dlatego wartość największego przepływu w N jest równa co najwyżej $|A|$.

Pokażemy teraz, że istnieje przepływ f w N o wartości $|A|$. Dla każdego $a \in A(G')$ zdefiniujmy $f(a) = c(a)$. Oczywiście $0 \leqslant f(a) \leqslant c(a)$ dla każdego $a \in A(G')$. Aby pokazać, że f jest przepływem pozostaje sprawdzić warunek Kirchoffa. Niech $v \in V$. Zauważmy, że

$$
\begin{aligned}
f^+(v) &= \sum_{(v,u)\in A} f(v, u) + f(v, t) = \sum_{(v,u)\in A} 1 + \deg^-_G(v) = \deg^+_G(v) + \deg^-_G(v),\\
f^-(v) &= \sum_{(u,v)\in A} f(u, v) + f(s, v) = \sum_{(u,v)\in A} 1 + \deg^+_G(v) = \deg^-_G(v) + \deg^+_G(v).
\end{aligned}
$$

Zatem, $f^+(v) = f^-(v)$, czyli f jest przepływem. Jego wartość to $\sum_{v\in V} f(s, v) = \sum_{v\in V} \deg^+_G(v) = |A|$, co kończy dowód. $\square$

5. (10p.) Niech $n \geqslant 3$ i niech G będzie grafem o zbiorze wierzchołków $V(G) = \{v_1, \ldots, v_n\}$. Dla każdego $i \geqslant 1$ oznaczmy $V_i = \{v_1, \ldots, v_i\}$ oraz $G_i = G[V_i]$. Pokaż, że jeśli $\deg_{G_2} v_2 = 1$ oraz dla każdego $i \in \{3, \ldots, n\}$ zachodzi $\deg_{G_i} v_i \geqslant \lceil \frac{i+1}{2} \rceil$, to G jest hamiltonowski.

Rozwiązanie. Pokażemy, że dla każdego $i \in \{3, \ldots, n\}$ graf G_i jest hamiltonowski. Teza wynika z tego, ponieważ $G = G_n$.

Zauważmy, że skoro $\deg_{G_2} v_2 = 1$, to $v_1 v_2$ jest krawędzią w G, a skoro $\deg_{G_3} v_3 \geqslant \lceil 3/2 \rceil = 2$, to v_1, v_2, v_3 tworzą trójkąt w G. Zatem graf G_2 jest hamiltonowski.

Przypuśćmy teraz, że dla pewnego $i \in \{3, \ldots, n-1\}$ graf G_i jest hamiltonowski. Rozważmy graf G_{i+1}. Graf ten składa się z wierzchołków ze zbioru V_i oraz wierzchołka v_{i+1}. Z założenia indukcyjnego wiemy, że w G_{i+1} istnieje cykl C długości i, którego wierzchołkami są wszystkie wierzchołki z V_i. Ponadto, v_{i+1} sąsiaduje z $\lceil \frac{i+1}{2} \rceil > \frac{i}{2}$ wierzchołkami z V_i, więc muszą istnieć takie dwa wierzchołki z V_i, które sąsiadują z v_{i+1} i są kolejnymi wierzchołkami na cyklu C; nazwijmy je x, y. Niech C' będzie uzyskany z C przez wstawienie v_{i+1} pomiędzy x i y. Zauważmy, że C' jest cyklem Hamiltona w G_{i+1}. Zatem, na mocy indukcji matematycznej, dla każdego $i \in \{3, \ldots, n\}$ graf G_i jest hamiltonowski, co kończy dowód. $\square$

Definicje, twierdzenia, wzory.

G jest grafem o zbiorze wierzchołków V i zbiorze krawędzi E. Oznaczamy $n := |V|$ i $m := |E|$. Dla $X \subseteq V$ przez $G[X]$ oznaczamy podgraf G indukowany przez zbiór X, czyli $(X, \{e \in E \mid e \subseteq X\})$.

Spójność.

Def. Graf jest **spójny**, jeśli dla dowolnych dwóch wierzchołków u, v istnieje u-v-ścieżka. Graf jest **k-spójny**, jeśli $|G| > k$ i dla każdego $V' \subseteq V$, $|V'| < k$ graf $G - V'$ jest spójny. Graf jest **k-spójny krawędziowo**, jeśli $|E| > 0$ i dla każdego $X \subseteq E$, $|X| < k$ graf $G - X$ jest spójny.
Def. Spójność wierzchołkowa, ozn. $\kappa(G)$ – największe k, dla którego graf jest k-spójny.
Def. Spójność krawędziowa, ozn. $\kappa'(G)$ – największe k, dla którego graf jest krawędziowo k-spójny.
Nierówność Whitneya. $\kappa(G) \leqslant \kappa'(G) \leqslant \delta(G)$.
Tw. Mengera 1. Dla dowolnych $A, B \subseteq V$, niech k będzie rozmiarem najmniejszego A-B-separatora. W G istnieje k rozłącznych $A - B$ ścieżek.
Tw. Mengera 2. Graf G jest k-spójny wtw. gdy dla każdej pary wierzchołków u, v istnieje k wewnętrznie rozłącznych u-v ścieżek.
Tw. Mengera 3. Graf G jest k-spójny wtw. gdy dla każdego $x \in V$ i $U \in V \setminus \{x\}$, $|U| = k$, istnieje x-U-wachlarz, czyli k wew. rozłącznych ścieżek o początku w x i końcach w różnych wierzchołkach z U.
Tw. Mengera 4. Graf G jest k-spójny krawędziowo wtw. gdy dla każdej pary wierzchołków u, v istnieje k krawędziowo rozłącznych u-v ścieżek.

Obwód Eulera.

Tw. Eulera (wersja z obwodem). Multigraf spójny ma obwód Eulera wtw. gdy każdy wierzchołek ma stopień parzysty.
Tw. Eulera (wersja z drogą). Multigraf spójny ma drogę Eulera wtw. gdy liczba wierzchołków stopnia nieparzystego jest mniejsza lub równa 2.

Cykl Hamiltona.

Warunek konieczny. Jeśli G ma cykl Hamiltona, to dla każdego $S \subseteq V$, $S \neq \emptyset$ graf $G - S$ ma co najwyżej $|S|$ spójnych składowych.
Tw. Diraca (warunek dostateczny). Jeśli G jest prosty i $n \geqslant 3$ oraz dla każdego $v \in V$ zachodzi $\deg(v) \geqslant \frac{n}{2}$, to G jest hamiltonowski.
Tw. Orego (warunek dostateczny). Jeśli G jest prosty i $n \geqslant 3$ oraz dla każdych u, v takich, że $uv \notin E$, zachodzi $\deg(u) + \deg(v) \geqslant n$, to G jest hamiltonowski.

Kolorowanie krawędzi.

Tw. Vizinga. $\Delta(G) \leqslant \chi'(G) \leqslant \Delta(G) + 1$.

Kolorowanie wierzchołków.

Def. Zbiór niezależny – zbiór wierzchołków takich, że żadne dwa nie są połączone krawędzią.
Def. Graf G jest **krytyczny**, jeśli dla każdego jego właściwiego podgrafu H zachodzi $\chi(H) < \chi(G)$. Graf jest **k-krytyczny**, jeśli jest krytyczny i $\chi(G) = k$.
Lemat. Jeśli G jest k-krytyczny, to $\delta(G) \geqslant k - 1$.
Tw. $\chi(G) \leqslant \Delta(G) + 1$ (algorytm zachłanny).
Tw. Brooksa Jeśli graf spójny G nie jest nieparzystym cyklem ani grafem pełnym, to $\chi(G) \leqslant \Delta(G)$.
Tw Mycielskiego. Dla każdego k istnieje graf G_k bez trójkątów taki, że $\chi(G_k) = k$.
Def. Talią grafu nazywamy długość najkrótszego cyklu w tym grafie.
Tw. Erdősa Dla dowolnych $k, \ell \in \mathbb{N}$ istnieje graf G taki, że $\chi(G) \geqslant k$ i talia grafu G jest co najmniej ℓ.

Skojarzenia.

Def. Skojarzeniem nazywamy zbiór rozłącznych krawędzi grafu. Skojarzeniem **maksymalnym** nazywamy skojarzenie, które nie jest podzbiorem żadnego innego skojarzenia. Skojarzeniem **doskonałym** nazywamy skojarzenie, które pokrywa każdy wierzchołek.
Def. Ścieżką naprzemienną względem skojarzenia M nazywamy ścieżkę, której krawędzie na przemian należą i nie należą do M. Ścieżka jest **powiększająca** względem skojarzenia M, jeśli jest naprzemienna względem M oraz zaczyna i kończy się w wierzchołku niepokrytym przez M.
Tw. Berge'a. Skojarzenie M jest największe wtw, gdy nie ma ścieżki powiększającej względem M.
Tw. Halla. Niech G będzie grafem dwudzielnym o klasach dwudzielności X, Y. W G istnieje skojarzenie pokrywające X wtw, gdy dla każdego $X' \subseteq X$ zachodzi $|N(X')| \geqslant |X'|$.

Sieci i przepływy.

Niech $N = (G, c, s, t)$ będzie siecią, $G = (V, A)$. Dla funkcji $f : A \to \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ definiujemy:

- Dla $v \in V$: $f^+(v) := \sum_{u: vu \in A} f(vu)$ i $f^-(v) := \sum_{u: uv \in A} f(uv)$
- Dla $S \subseteq V$: $f^+(S) := \sum_{\substack{uv \in A \\ u \in S \\ v \notin S}} f(uv)$ i $f^-(S) := \sum_{\substack{vu \in A \\ u \in S \\ v \notin S}} f(vu)$

Def. Funkcję $f : A \to \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ nazywamy **przepływem**, jeśli dla każdego $a \in A$ zachodzi $f(a) \leqslant c(a)$ oraz dla każdego $v \in V \setminus \{s, t\}$ zachodzi $f^+(v) = f^-(v)$.
Def. Wartość przepływu f to $\operatorname{val} f := f^+(s) - f^-(s)$.
Fakt. $f^+(s) - f^-(s) = f^-(t) - f^+(t)$.
Def. Dla dowolnego $S \subseteq V$ takiego, że $s \in S$ i $t \in \overline{S} := V \setminus S$, **przekrojem** $(S, \overline{S})$ nazywamy zbiór krawędzi o początku w S i końcu w $\overline{S}$. **Przepustowością** przekroju $K = (S, \overline{S})$ nazywamy $\operatorname{cap} K := \sum_{a \in K} c(a)$.
Lemat. Dla dowolnego przepływu f i dowolnego przekroju $(S, \overline{S})$ zachodzi $\operatorname{val} f = f^+(S) - f^-(S)$.
Tw. Dla dowolnego przepływu f i dowolnego przekroju K zachodzi $\operatorname{val} f \leqslant \operatorname{cap} K$. Jeśli $\operatorname{val} f = \operatorname{cap} K$, to f jest największym przepływem, a K najmniejszym przekrojem.
Def. Dla ścieżki P (niekoniecznie skierowanej), przepływu f i łuku a z P definujemy:

$$r(a) = \begin{cases} c(a) - f(a) & \text{jeśli } a \text{ jest krawędzią w przód,} \\ f(a) & \text{jeśli } a \text{ jest krawędzią w tył.} \end{cases}$$

Dla ścieżki P definiujemy $r(P) := \min_{a \text{ - łuk } P} r(a)$.

Ścieżka P jest **powiększająca** jeśli jest s-t ścieżką i $r(P) > 0$. Wówczas można zdefiniować przepływ $\hat{f}(a)$ jako:

$$\hat{f}(a) = \begin{cases} f(a) + r(P), & \text{jeśli } a \in A(P) \text{ jest łukiem w przód,} \\ f(a) - r(P), & \text{jeśli } a \in A(P) \text{ jest łukiem w tył} \\ f(a), & \text{jeśli } a \notin A(P). \end{cases}$$

Tw. Forda-Fulkersona. Przepływ f jest największy wtw. gdy nie ma ścieżki powiększającej.
Wniosek Jeśli f^* jest największym przepływem, a $\widetilde{K}$ najmniejszym przekrojem, to $\operatorname{cap} \widetilde{K} = \operatorname{val} f^*$.

Planarność.

Tw. Kuratowskiego. Graf G jest planarny wtw. gdy nie zawiera podpodziału $K_{3,3}$ lub K_5.
Tw. Dla grafu płaskiego G zachodzi $\sum_{f \in F(G)} \deg_G f = 2m$, gdzie przez $F(G)$ oznaczamy zbiór regionów (ścian) grafu płaskiego G.
Formuła Eulera. Dla spójnego grafu płaskiego G zachodzi $n - m + |F(G)| = 2$.
Lemat. Dla prostego grafu planarnego G o $n \geqslant 3$ wierzchołkach i talii k zachodzi $m \leqslant k(n-2)/(k-2)$.
Wniosek. Dla prostego grafu planarnego G o $n \geqslant 3$ wierzchołkach zachodzi $m \leqslant 3n - 6$.
Wniosek. Każdy graf planarny ma wierzchołek stopnia co najwyżej 5.
Tw. o czterech kolorach. Jeśli G jest planarny, to $\chi(G) \leqslant 4$.
Def. Dla grafu płaskiego G, jego **grafem dualnym** G^* nazywamy graf, którego wierzchołkami są regiony G i istnieje bijekcja między $E(G^*)$ a $E(G)$: krawędź e^* łączy dwa wierzchołki f_1, f_2 w G^* wtw, gdy odpowiadająca jej krawędź e z G jest incydentna z f_1 i f_2.

Teoria Ramseya.

Def. Liczba Ramseya, ozn. $R(t)$, to najmniejsze n takie, że przy dowolnym dwukolorowaniu krawędzi K_n znajdziemy jednokolorową kopię K_t.
Przez $R(t_1, t_2, \ldots, t_k)$ oznaczamy najmniejsze n takie, że przy dowolnym kolorowaniu K_n na k kolorów znajdziemy kopię K_{t_1} w pierwszym kolorze, K_{t_2} w drugim kolorze, ... lub K_{t_k} w k-tym kolorze.
Tw. Ramseya (Erdősa-Szekeresa). Dla każdego t zachodzi $R(t) \leqslant 4^t$.
Tw. Erdősa. Dla $t \geqslant 3$ zachodzi $R(t) > 2^{t/2}$.
Tw. Dla $s, t > 1$ zachodzi $R(s,t) \leqslant R(s, t-1) + R(s-1, t)$.
Wniosek. Dla $s, t \geqslant 1$ zachodzi $R(s,t) \leqslant \binom{s+t-2}{s-1} = \binom{s+t-2}{t-1}$.