

1. (10p.) Pokaż, że każdy graf 3-spójny zawiera podpodział grafu K_4 .

Uwaga: Zadanie wymyślił IJ z rocznika 2023/24.

Rozwiązanie. Niech G będzie grafem 3-spójnym i niech xy będzie dowolną krawędzią. Z twierdzenia Mengera wiemy, że istnieją w G trzy wewnętrznie rozłączne x - y -ścieżki. Co najwyżej jedna z nich jest krawędzią xy , oznaczmy dwie pozostałe przez A i B . Przez A^* i B^* oznaczmy odpowiednio zbiór wewnętrznych wierzchołków A i B , oczywiście zbiory te są niepuste.

Ponieważ G jest 3-spójny, graf $G - \{x, y\}$ jest spójny. Oznaczmy przez P najkrótszą ścieżkę w $G - \{x, y\}$ o końcach w A^* i B^* . Oznaczmy te końce przez $a \in A^*$ i $b \in B^*$. Teraz zdefiniujmy podpodział grafu K_4 . Wierzchołkami stopnia 3 będą x, y, a, b . Krawędzie reprezentowane są przez ścieżki: P (od a do b), odpowiednie fragmenty A (od x do a i od a do y), odpowiednie fragmenty B (od x do b i od b do y) oraz krawędź xy . $\square$

2. (10p.) Niech G będzie spójnym grafem takim, że $\chi(G) = \chi'(G)$. Wykaż, że jeśli G jest planarny, to nie zawiera wierzchołka stopnia większego niż 4.

Rozwiązanie. Załóżmy nie wprost, że G jest spójnym grafem planarnym i $\Delta(G) > 4$. Oczywiście G nie jest cyklem. Nie może być też kliką, bo ma co najmniej $\Delta(G) + 1 > 5$ wierzchołków. Zatem, z twierdzenia Brooksa, $\chi(G) \leq \Delta(G)$. Ponadto wiemy, że $\chi'(G) \geq \Delta(G)$, zatem mamy ciąg nierówności:

$$\chi'(G) = \chi(G) \leq \Delta(G) \leq \chi'(G).$$

Zatem, wszystkie powyższe nierówności stają się równościami, w szczególności $\chi(G) = \Delta(G)$. Z twierdzenia o czterech kolorach mamy $\chi(G) \leq 4$, zatem także $\Delta(G) \leq 4$, co przeczy początkowemu założeniu. $\square$

3. (10p.) Niech G będzie dwudzielnym grafem hamiltonowskim. Pokaż, że w G istnieje skojarzenie doskonałe.

Rozwiązanie. Skoro G jest dwudzielnym, to nie zawiera cykli nieparzystych. W szczególności cykl Hamiltona w G musi mieć parzystą długość, stąd $|V(G)|$ jest liczbą parzystą. Niech $v_1v_2 \dots v_{2k}$ będzie cyklem Hamiltona w G , gdzie $|V(G)| = 2k$. Oczywiście $M = \{v_1v_2, v_3v_4, \dots, v_{2k-1}v_{2k}\}$ jest skojarzeniem w G . Skojarzenie to pokrywa wszystkie wierzchołki G , zatem jest doskonałe. $\square$

4. (10p.) Pokaż, że w każdym kolorowaniu krawędzi grafu K_n kolorami czerwonym i niebieskim istnieje jednokolorowe drzewo rozpinające.

Rozwiązanie 1. Indukcja po n . Jeśli $n = 1$, teza jest oczywiście prawdziwa. Załóżmy więc, że teza działa dla $n - 1$ i rozważmy 2-kolorowanie krawędzi K_n o wierzchołkach $v_1, \dots, v_n$, gdzie $n \geq 2$. Rozważmy podgraf indukowany przez $\{v_1, \dots, v_{n-1}\}$ (z tym samym kolorowaniem). Z założenia indukcyjnego mamy w nim jednokolorowe drzewo rozpinające T . Z symetrii załóżmy, że drzewo to jest czerwone. Jeśli wszystkie krawędzie od v_n do $\{v_1, \dots, v_{n-1}\}$ są niebieskie, otrzymaliśmy rozpinającą niebieską gwiazdę o centrum w v_n . Przypuśćmy zatem, że istnieje $i \in [n - 1]$, dla którego krawędź $v_i v_n$ jest czerwona. Dodając wierzchołek v_n wraz z krawędzią $v_i v_n$ do T , otrzymujemy czerwone drzewo rozpinające (gdzie v_n jest liściem). $\square$

Rozwiązanie 2. Weźmy dowolne kolorowanie grafu K_n i niech G będzie grafem, który zawiera krawędzie pokolorowane na czerwono. Wtedy $\overline{G}$ zawiera krawędzie pokolorowane na niebiesko. Wiemy, że G lub $\overline{G}$ jest spójny; bez straty ogólności przyjmijmy, że G jest grafem spójnym. Wtedy w G możemy znaleźć drzewo rozpinające, które w ustalonym kolorowaniu K_n będzie miało krawędzie w jednym kolorze. $\square$

5. (10p.) Niech $N = (G, c, s, t)$ będzie siecią, a f przepływem w sieci N . Oznaczmy przez G_f podgraf grafu G , w którym obecne są tylko łuki, na których f przyjmuje dodatnią wartość. Pokaż, że istnieje największy przepływ f^* w N taki, że G_{f^*} jest acykliczny.

Rozwiązanie. Niech f^* będzie największym przepływem w sieci N takim, że G_{f^*} zawiera najmniejszą liczbę cykli i założmy nie wprost, że G_{f^*} zawiera cykl (skierowany) C . Niech $m = \min_{a \in A(C)} f^*(a)$. Z założenia, m jest liczbą dodatnią. Zdefiniujmy funkcję $f_C : A(G) \rightarrow \mathbb{R}$ następująco:

$$f_C(a) = \begin{cases} f^*(a) - m, & \text{gdy } a \in A(C), \\ f^*(a) & \text{wpp.} \end{cases}$$

Pokażemy teraz, że f_C jest przepływem. Oczywiście zachodzi $f_C(a) \geq 0$ dla każdego łuku $a \in A(G)$. Niech teraz $v \in V(G) \setminus \{s, t\}$. Jeśli $v \notin V(C)$, to $f_C^+(v) = f^{*+}(v) = f^{*-}(v) = f_C^-(v)$. Jeśli natomiast $v \in V(C)$, to $f_C^+(v) = f^{*+}(v) - m = f^{*-}(v) - m = f_C^-(v)$. Funkcja f_C jest więc nieujemna oraz spełnia warunek Kirchhoffa, zatem istotnie jest przepływem. Ponadto, jeśli $s \notin V(C)$, to $\text{val } f_C = f_C^+(s) - f_C^-(s) = f^{*+}(s) - f^{*-}(s) = \text{val } f^*$. Jeśli natomiast $s \in V(C)$, to $\text{val } f_C = f_C^+(s) - f_C^-(s) = (f^{*+}(s) - m) - (f^{*-}(s) - m) = \text{val } f^*$. Przepływ f_C ma więc wartość równą wartości f^* , zatem jest największy. Zauważmy teraz, że G_{f_C} jest podgrafem G_{f^*} oraz cykl C nie występuje w G_{f_C} (bo f_C na pewnej krawędzi C przyjmie wartość 0). G_{f_C} zawiera zatem mniejszą liczbę cykli niż G_{f^*} , o przeczy założeniu o minimalności. $\square$

Definicje, twierdzenia, wzory.

G jest grafem o zbiorze wierzchołków V i zbiorze krawędzi E . Oznaczamy $n := |V|$ i $m := |E|$. Dla $X \subseteq V$ przez $G[X]$ oznaczamy podgraf G indukowany przez zbiór X , czyli $(X, \{e \in E \mid e \subseteq X\})$.

Spójność.

Def. Graf jest **spójny**, jeśli dla dowolnych dwóch wierzchołków u, v istnieje $u-v$ ścieżka. Graf jest **k -spójny**, jeśli $|G| > k$ i dla każdego $V' \subseteq V$, $|V'| < k$ graf $G - V'$ jest spójny. Graf jest **k -spójny krawędziowo**, jeśli $|E| > 0$ i dla każdego $X \subseteq E$, $|X| < k$ graf $G - X$ jest spójny.

Def. Spójność wierzchołkowa, ozn. $\kappa(G)$ – największe k , dla którego graf jest k -spójny.

Def. Spójność krawędziowa, ozn. $\kappa'(G)$ – największe k , dla którego graf jest krawędziowo k -spójny.

Nierówność Whitneya. $\kappa(G) \leq \kappa'(G) \leq \delta(G)$.

Tw. Menger 1. Dla dowolnych $A, B \subseteq V$, niech k będzie rozmiarem najmniejszego $A-B$ -separatora. W G istnieje k rozłącznych $A-B$ ścieżek.

Tw. Menger 2. Graf G jest k -spójny wtw. gdy dla każdej pary wierzchołków u, v istnieje k wewnętrznich rozłącznych $u-v$ ścieżek.

Tw. Menger 3. Graf G jest k -spójny wtw. gdy dla każdego $x \in V$ i $U \subseteq V \setminus \{x\}$, $|U| = k$, istnieje $x-U$ -wachlarz, czyli k wew. rozłącznych ścieżek o początku w x i końcach w różnych wierzchołkach z U .

Tw. Menger 4. Graf G jest k -spójny krawędziowo wtw. gdy dla każdej pary wierzchołków u, v istnieje k krawędziowo rozłącznych $u-v$ ścieżek.

Obwód Eulera.

Tw. Eulera (wersja z obwodem). Multigraf spójny ma obwód Eulera wtw. gdy każdy wierzchołek ma stopień parzysty.

Tw. Eulera (wersja z drogą). Multigraf spójny ma drogę Eulera wtw. gdy liczba wierzchołków stopnia nieparzystego jest mniejsza lub równa 2.

Cykl Hamiltona.

Warunek konieczny. Jeśli G ma cykl Hamiltona, to dla każdego $S \subseteq V$, $S \neq \emptyset$ graf $G - S$ ma co najwyżej $|S|$ spójnych składowych.

Tw. Diraca (warunek dostateczny). Jeśli G jest prosty i $n \geq 3$ oraz dla każdego $v \in V$ zachodzi $\deg(v) \geq \frac{n}{2}$, to G jest hamiltonowski.

Tw. Ore'go (warunek dostateczny). Jeśli G jest prosty i $n \geq 3$ oraz dla każdych u, v takich, że $uv \notin E$, zachodzi $\deg(u) + \deg(v) \geq n$, to G jest hamiltonowski.

Kolorowanie krawędzi.

Tw. Vizinga. $\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$.

Kolorowanie wierzchołków.

Def. Zbiór niezależny – zbiór wierzchołków takich, że żadne dwa nie są połączone krawędzią.

Def. Graf G jest **krytyczny**, jeśli dla każdego jego właściwego podgrafu H zachodzi $\chi(H) < \chi(G)$. Graf jest **k -krytyczny**, jeśli jest krytyczny i $\chi(G) = k$.

Lemat. Jeśli G jest k -krytyczny, to $\delta(G) \geq k - 1$.

Tw. $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$ (algorytm zachłanny).

Tw. Brooksa Jeśli graf spójny G nie jest nieparzystym cyklem ani grafem pełnym, to $\chi(G) \leq \Delta(G)$.

Tw. Mycielskiego. Dla każdego k istnieje graf G_k bez trójkątów taki, że $\chi(G_k) = k$.

Def. Talią grafu nazywamy długość najkrótszego cyklu w tym grafie.

Tw. Erdősa Dla dowolnych $k, \ell \in \mathbb{N}$ istnieje graf G taki, że $\chi(G) \geq k$ i talia grafu G jest co najmniej ℓ .

Skojarzenia.

Def. **Skojarzeniem** nazywamy zbiór rozłącznych krawędzi grafu. Skojarzeniem **maksymalnym** nazywamy skojarzenie, które nie jest podzbiorem żadnego innego skojarzenia. Skojarzeniem **doskonałym** nazywamy skojarzenie, które pokrywa każdy wierzchołek.

Def. Ścieżką naprzemienną względem skojarzenia M nazywamy ścieżkę, której krawędzie na przemian należą i nie należą do M . Ścieżka jest **powiększająca** względem skojarzenia M , jeśli jest naprzemienna względem M oraz zaczyna i kończy się w wierzchołku niepokrytym przez M .

Tw. Berge'a. Skojarzenie M jest największe wtw, gdy nie ma ścieżki

powiększającej względem M .

Tw. Halla. Niech G będzie grafem dwudzielnym o klasach dwudzielności X, Y . W G istnieje skojarzenie pokrywające X wtw, gdy dla każdego $X' \subseteq X$ zachodzi $|N(X')| \geq |X'|$.

Sieci i przepływy.

Niech $N = (G, c, s, t)$ będzie siecią, $G = (V, A)$. Dla funkcji $f : A \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ definiujemy:

- Dla $v \in V$: $f^+(v) := \sum_{u:vu \in A} f(vu)$ i $f^-(v) := \sum_{u:uv \in A} f(uv)$
- Dla $S \subseteq V$: $f^+(S) := \sum_{\substack{uv \in A \\ u \in S \\ v \notin S}} f(uv)$ i $f^-(S) := \sum_{\substack{vu \in A \\ u \in S \\ v \notin S}} f(vu)$

Def. Funkcję $f : A \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ nazywamy **przepływem**, jeśli dla każdego $a \in A$ zachodzi $f(a) \leq c(a)$ oraz dla każdego $v \in V \setminus \{s, t\}$ zachodzi $f^+(v) = f^-(v)$.

Def. Wartość przepływu f to $\text{val } f := f^+(s) - f^-(s)$.

Fakt. $f^+(s) - f^-(s) = f^-(t) - f^+(t)$.

Def. Dla dowolnego $S \subseteq V$ takiego, że $s \in S$ i $t \in \bar{S} := V \setminus S$, **przekrojem** $(S, \bar{S})$ nazywamy zbiór krawędzi o początku w S i końcu w $\bar{S}$. **Przepustowością** przekroju $K = (S, \bar{S})$ nazywamy $\text{cap } K := \sum_{a \in K} c(a)$.

Lemat. Dla dowolnego przepływu f i dowolnego przekroju $(S, \bar{S})$ zachodzi $\text{val } f = f^+(S) - f^-(S)$.

Tw. Dla dowolnego przepływu f i dowolnego przekroju K zachodzi $\text{val } f \leq \text{cap } K$. Jeśli $\text{val } f = \text{cap } K$, to f jest największym przepływem, a K najmniejszym przekrojem.

Def. Dla ścieżki P (niekoniecznie skierowanej), przepływu f i łuku a z P definiujemy:

$$r(a) = \begin{cases} c(a) - f(a) & \text{jeśli } a \text{ jest krawędzią w przód,} \\ f(a) & \text{jeśli } a \text{ jest krawędzią w tył.} \end{cases}$$

Dla ścieżki P definiujemy $r(P) := \min_{a \in \text{łuk } P} r(a)$.

Ścieżka P jest **powiększająca** jeśli jest $s-t$ ścieżką i $r(P) > 0$. Wówczas można zdefiniować przepływ $\hat{f}(a)$ jako:

$$\hat{f}(a) = \begin{cases} f(a) + r(P), & \text{jeśli } a \in A(P) \text{ jest łukiem w przód,} \\ f(a) - r(P), & \text{jeśli } a \in A(P) \text{ jest łukiem w tył} \\ f(a), & \text{jeśli } a \notin A(P). \end{cases}$$

Tw. Forda-Fulkersona. Przepływ f jest największy wtw. gdy nie ma ścieżki powiększającej.

Wniosek Jeśli f^* jest największym przepływem, a $\tilde{K}$ najmniejszym przekrojem, to $\text{cap } \tilde{K} = \text{val } f^*$.

Planarność.

Tw. Kuratowskiego. Graf G jest planarny wtw. gdy nie zawiera podpodziału $K_{3,3}$ lub K_5 .

Tw. Dla grafu płaskiego G zachodzi $\sum_{f \in F(G)} \deg_G f = 2m$, gdzie przez $F(G)$ oznaczamy zbiór regionów (ścian) grafu płaskiego G .

Formuła Eulera. Dla spójnego grafu płaskiego G zachodzi $n - m + |F(G)| = 2$.

Lemat. Dla prostego grafu planarnego G o $n \geq 3$ wierzchołkach i talii k zachodzi $m \leq k(n-2)/(k-2)$.

Wniosek. Dla prostego grafu planarnego G o $n \geq 3$ wierzchołkach zachodzi $m \leq 3n - 6$.

Wniosek. Każdy graf planarny ma wierzchołek stopnia co najwyżej 5.

Tw. o czterech kolorach. Jeśli G jest planarny, to $\chi(G) \leq 4$.

Def. Dla grafu płaskiego G , jego **grafem dualnym** G^* nazywamy graf, którego wierzchołkami są regiony G i istnieje bijekcja między $E(G^*)$ a $E(G)$: krawędź e^* łączy dwa wierzchołki f_1, f_2 w G^* wtw, gdy odpowiadająca jej krawędź e z G jest incydentna z f_1 i f_2 .

Teoria Ramseya.

Def. Liczba Ramseya, ozn. $R(t)$, to najmniejsze n takie, że przy dowolnym dwukolorowaniu krawędzi K_n znajdziemy jednokolorową kopię K_t .

Przez $R(t_1, t_2, \dots, t_k)$ oznaczamy najmniejsze n takie, że przy dowolnym kolorowaniu K_n na k kolorów znajdziemy kopię K_{t_1} w pierwszym kolorze, K_{t_2} w drugim kolorze, ... lub K_{t_k} w k -tym kolorze.

Tw. Ramseya (Erdősa-Szekeres). Dla każdego t zachodzi $R(t) \leq 4^t$.

Tw. Erdősa. Dla $t \geq 3$ zachodzi $R(t) > 2^{t/2}$.

Tw. Dla $s, t > 1$ zachodzi $R(s, t) \leq R(s, t-1) + R(s-1, t)$.

Wniosek. Dla $s, t \geq 1$ zachodzi $R(s, t) \leq \binom{s+t-2}{s-1} = \binom{s+t-2}{t-1}$.