1. (10p.) Niech G będzie eulerowskim grafem płaskim. Niech g będzie dowolnie wybranym regionem. Pokaż, że jeśli stopień każdego regionu poza g jest podzielny przez 3, to stopień g też jest podzielny przez 3.

Rozwiązanie. Wiadomo z ćwiczeń, że jeśli graf płaski G jest eulerowski, to jego graf dualny G^* jest dwudzielny. Niech X, Y będą jego klasami dwudzielności i bez straty ogólności załóżmy, że $g \in Y$. Wówczas $|E(G^*)| = \sum_{f \in X} \deg_{G^*} f = \sum_{f \in Y} \deg_{G^*} f$. Wyłączając z drugiej sumy g, otrzymujemy:

$$\deg_{G^*} g = \sum_{f \in X} \deg_{G^*} f - \sum_{g \neq f \in Y} \deg_{G^*} f.$$

Wszystkie składniki występujące po prawej stronie tej równości są podzielne przez 3, zatem jej wartość jest podzielna przez 3. Wynika stąd, że i lewa strona, równa $\deg_{G^*} g$, dzieli się przez 3. $\square$

2. (10p.) Niech $G = (V, E)$ będzie grafem spójnym takim, że $|E| \geqslant |V|$. Pokaż, że każdemu wierzchołkowi $v \in V$ można przyporządkować unikalną krawędź $e \in E$, z którą v jest incydentny (tzn. istnieje funkcja różnowartościowa $f : V \to E$ taka, że dla każdego $v \in V$, krawędź $f(v)$ jest incydentna z v).

Rozwiązanie 1. Niech H będzie grafem dwudzielnym takim, że $V(H) = V \cup E$ i $E(H) = \{ve \mid v \in V \wedge e \in E \wedge v \in e\}$. Pokażemy, że w H spełniony jest warunek Halla dla V, co, na mocy twierdzenia Halla, zakończy dowód.

Niech $S \subseteq V$. Jeśli $S = V$, to $N(S) = E$ oraz $|N(S)| = |E| \geqslant |V| = |S|$. Niech teraz $S \neq V$ i rozważmy graf $G[S]$. Niech $G_1, \ldots, G_k$ będą spójnymi składowymi $G[S]$. Wewnątrz dowolnej składowej G_i, $i = 1, \ldots, k$, istnieje co najmniej $|V(G_i)| - 1$ krawędzi (ze spójności G_i). Dodatkowo, każda ze składowych G_i zawiera krawędź o jednym końcu wewnątrz składowej i jednym na zewnątrz niej, inaczej G byłby niespójny. Ta krawędź nie może mieć końca w żadnej ze składowych G_j, $j \neq i$, bo inaczej $G[V(G_i) \cup V(G_j)]$ byłby spójny, co byłoby sprzeczne z podziałem $G[S]$ na spójne składowe. Zatem, jeśli oznaczymy zbiór krawędzi incydentnych z $V(G_i)$, które nie mają końca w innej składowej przez E_i, zachodzi $|E_i| \geqslant |V(G_i)|$. Zbiory E_i, $i = 1, \ldots, k$, są ponadto parami rozłączne. Ostatecznie,

$$|N(S)| \geqslant \sum_{i=1}^{k} |E_i| \geqslant \sum_{i=1}^{k} |V(G_i)| = |S|,$$

zatem warunek Halla istotnie jest spełniony w H dla V. $\square$

Rozwiązanie 2. (dziękuję KO) Niech T będzie drzewem rozpinającym grafu G. Ponieważ $|E(T)| = |V| - 1 < |E|$, na pewno istnieje krawędź $e \in E \setminus E(T)$. Niech x będzie jednym z jej końców.

Potraktujmy T jako drzewo ukorzenione w x, to definiuje nam relację rodzic-dzieci. Każdemu wierzchołkowi poza x przypisujemy unikalną krawędź prowadzącą do jego rodzica w T. Oczywiście te krawędzie są parami różne. Wierzchołek x nie ma rodzica w T, ale możemy mu przypisać krawędź e. Te krawędź nie występuje w T, więc na pewno jest różna od wszystkich wybranych dotąd. $\square$

3. (10p.) Znajdź wszystkie drzewa T o co najmniej trzech krawędziach, dla których graf krawędziowy $L(T)$ jest 2-spójny.

Przypomnijmy, że przez $L(T)$ oznaczamy graf o zbiorze wierzchołków $E(T)$, taki że $e, f \in E(T)$ tworzą krawędź w $L(T)$ jeśli mają wspólny koniec w T.

Rozwiązanie. Wykażemy, że T musi być gwiazdą. Przypuśćmy, że w T są co najmniej dwa wierzchołki stopnia większego niż 1, u i v. Ponieważ drzewo jest grafem spójnym, istnieje ścieżka P między wierzchołkami u i v, złożona z co najmniej jednej krawędzi. Ponieważ T jest drzewem, każda krawędź jest mostem; wynika stąd, że u, v mają sąsiadów poza ścieżką P. Niech e będzie dowolną krawędzią na P. Skoro e jest w T mostem, który rozdziela wierzchołki u, v, a każdy z nich jest incydentny z krawędzią różną od e, zatem e jest wierzchołkiem rozcinającym w $L(T)$, przecząc 2-spójności. Wobec tego w T istnieje co najwyżej jeden wierzchołek stopnia większego niż 1, tj. T jest gwiazdą.

Z drugiej strony, jeśli T jest gwiazdą o co najmniej trzech krawędziach, jej graf krawędziowy jest kliką o co najmniej trzech wierzchołkach. Graf ten jest zawsze 2-spójny. $\square$

4. (10p.) Pokaż, że dla $\omega \geqslant 2$, każdy graf o liczbie chromatycznej większej niż $\binom{\omega}{2}$ zawiera klikę (podgraf pełny) o ω wierzchołkach lub indukowany podgraf $K_{1,3}$.

Rozwiązanie. Przypuśćmy że graf G nie zawiera kliki rozmiaru ω ani $K_{1,3}$. Pokażemy, że $\chi(G) \leqslant \binom{\omega}{2}$. Rozważmy dowolny wierzchołek $v \in V(G)$. W założenia wiemy, że w jego sąsiedztwie nie ma kliki rozmiaru $\omega - 1$ ani zbioru niezależnego rozmiaru 3, bo w przeciwnym przypadku otrzymalibyśmy jedną z zabronionych podstruktur.

Wynika z tego, że stopień wierzchołka v jest ostro mniejszy niż $\mathsf{R}(\omega - 1, 3)$, gdzie $\mathsf{R}(\cdot, \cdot)$ oznacza liczbę Ramseya. Korzystając ze wzoru $\mathsf{R}(s, t) \leqslant \binom{s+t-2}{t-1}$ i z dowolności wyboru v, dostajemy

$$\Delta(G) < \mathsf{R}(\omega - 1, 3) \leqslant \binom{(\omega - 1) + 3 - 2}{2} = \binom{\omega}{2}.$$

Skoro $\chi(G) \leqslant \Delta(G) + 1$, dostajemy $\chi(G) \leqslant \binom{\omega}{2}$. $\square$

5. (10p.) Niech a, b będą liczbami naturalnymi większymi od 1. Hobbit mieszka w lewym górnym rogu szachownicy o wymiarach $a \times b$. Hobbit (jak to hobbit) chciałby pójść tam i z powrotem, czyli odwiedzić każde pole pole szachownicy dokładnie raz i dodatkowo w ostatnim ruchu wrócić do domu (czyli wykonamy dokładnie ab ruchów). Z jednego pola można przejść na inne wtedy i tylko wtedy, gdy mają one wspólny bok. Wykaż, że zaplanowana wyprawa jest możliwa wtedy i tylko wtedy, gdy liczba ab jest parzysta.

Rozwiązanie. Rozważmy graf G, którego wierzchołkami są pola danej szachownicy, i sąsiadują one w grafie dokładnie wtedy, gdy sąsiadują na szachownicy (bez sąsiadowania po przekątnej). Zadanie polega na sprawdzeniu, kiedy graf G jest hamiltonowski.

Ustalając na danej szachownicy standardowe kolorowanie na biało i czarno, widzimy, że G jest grafem dwudzielnym. Jeśli więc liczba pól – wierzchołków G – jest nieparzysta, nie może on zawierać cyklu Hamiltona (np. dlatego, że w grafie dwudzielnym w ogóle nie ma cykli o nieparzystej długości).

Przypuśćmy zatem, że liczba ab jest parzysta. Oznacza to, że któraś z liczb a, b jest parzysta – bez straty ogólności przyjmijmy, że a. Zorientujmy szachownicę tak, aby a było wymiarem pionowym (wysokością). Pola oznaczamy przez (i, j), gdzie $i \in \{1, \dots, a\}$ jest numerem wiersza, a $j \in \{1, \dots, b\}$ jest numerem kolumny. Trasa hobbita przebiega następująco (patrz też rysunek poniżej):

1. Z pola startowego $(1, 1)$ pierwszym wierszem idzie do pola $(1, b)$ i przechodzi do pola $(2, b)$ (korzystamy tutaj z tego, że $a > 1$).

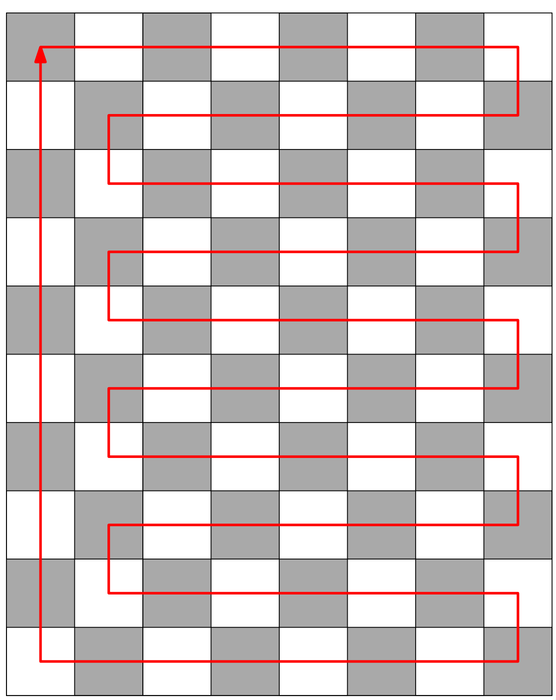
2. Idzie drugim wierszem do pola $(2, 2)$ i przechodzi do pola $(3, b)$,

3. Idzie trzecim wierszem do pola $(3, b)$ i przechodzi do pola $(4, b)$,

4. Kroki 2 i 3 (oczywiście dla właściwych indeksów wierszy) powtarza aż do ostatniego wiersza. Zauważmy, że skoro a jest parzyste, znajduje się na polu $(a, 2)$.

5. Przechodzi na pole $(a, 1)$ i kolumną pierwszą wraca do domu.

W ten sposób udało się odwiedzić każde pole dokładnie raz, a potem w jednym ruchu wrócić do domu. Wszędzie dobrze, ale w domu najlepiej. □



Definicje, twierdzenia, wzory.

G jest grafem o zbiorze wierzchołków V i zbiorze krawędzi E. Oznaczamy $n := |V|$ i $m := |E|$. Dla $X \subseteq V$ przez $G[X]$ oznaczamy podgraf G indukowany przez zbiór X, czyli $(X, \{e \in E \mid e \subseteq X\})$.

Spójność.

Def. Graf jest **spójny**, jeśli dla dowolnych dwóch wierzchołków u, v istnieje u-v-ścieżka. Graf jest **k-spójny**, jeśli $|G| > k$ i dla każdego $V' \subseteq V$, $|V'| < k$ graf $G - V'$ jest spójny. Graf jest **k-spójny krawędziowo**, jeśli $|E| > 0$ i dla każdego $X \subseteq E$, $|X| < k$ graf $G - X$ jest spójny.
Def. Spójność wierzchołkowa, ozn. $\kappa(G)$ – największe k, dla którego graf jest k-spójny.
Def. Spójność krawędziowa, ozn. $\kappa'(G)$ – największe k, dla którego graf jest krawędziowo k-spójny.
Nierówność Whitneya. $\kappa(G) \leqslant \kappa'(G) \leqslant \delta(G)$.
Tw. Mengera 1. Dla dowolnych $A, B \subseteq V$, niech k będzie rozmiarem najmniejszego A-B-separatora. W G istnieje k rozłącznych $A - B$ ścieżek.
Tw. Mengera 2. Graf G jest k-spójny wtw. gdy dla każdej pary wierzchołków u, v istnieje k wewnętrznie rozłącznych u-v ścieżek.
Tw. Mengera 3. Graf G jest k-spójny wtw. gdy dla każdego $x \in V$ i $U \in V \setminus \{x\}$, $|U| = k$, istnieje x-U-wachlarz, czyli k wew. rozłącznych ścieżek o początku w x i końcach w różnych wierzchołkach z U.
Tw. Mengera 4. Graf G jest k-spójny krawędziowo wtw. gdy dla każdej pary wierzchołków u, v istnieje k krawędziowo rozłącznych u-v ścieżek.

Obwód Eulera.

Tw. Eulera (wersja z obwodem). Multigraf spójny ma obwód Eulera wtw. gdy każdy wierzchołek ma stopień parzysty.
Tw. Eulera (wersja z drogą). Multigraf spójny ma drogę Eulera wtw. gdy liczba wierzchołków stopnia nieparzystego jest mniejsza lub równa 2.

Cykl Hamiltona.

Warunek konieczny. Jeśli G ma cykl Hamiltona, to dla każdego $S \subseteq V$, $S \neq \emptyset$ graf $G - S$ ma co najwyżej $|S|$ spójnych składowych.
Tw. Diraca (warunek dostateczny). Jeśli G jest prosty i $n \geqslant 3$ oraz dla każdego $v \in V$ zachodzi $\deg(v) \geqslant \frac{n}{2}$, to G jest hamiltonowski.
Tw. Orego (warunek dostateczny). Jeśli G jest prosty i $n \geqslant 3$ oraz dla każdych u, v takich, że $uv \notin E$, zachodzi $\deg(u) + \deg(v) \geqslant n$, to G jest hamiltonowski.

Kolorowanie krawędzi.

Tw. Vizinga. $\Delta(G) \leqslant \chi'(G) \leqslant \Delta(G) + 1$.

Kolorowanie wierzchołków.

Def. Zbiór niezależny – zbiór wierzchołków takich, że żadne dwa nie są połączone krawędzią.
Def. Graf G jest **krytyczny**, jeśli dla każdego jego właściwego podgrafu H zachodzi $\chi(H) < \chi(G)$. Graf jest **k-krytyczny**, jeśli jest krytyczny i $\chi(G) = k$.
Lemat. Jeśli G jest k-krytyczny, to $\delta(G) \geqslant k - 1$.
Tw. $\chi(G) \leqslant \Delta(G) + 1$ (algorytm zachłanny).
Tw. Brooksa Jeśli graf spójny G nie jest nieparzystym cyklem ani grafem pełnym, to $\chi(G) \leqslant \Delta(G)$.
Tw Mycielskiego. Dla każdego k istnieje graf G_k bez trójkątów taki, że $\chi(G_k) = k$.
Def. Talią grafu nazywamy długość najkrótszego cyklu w tym grafie.
Tw. Erdősa Dla dowolnych $k, \ell \in \mathbb{N}$ istnieje graf G taki, że $\chi(G) \geqslant k$ i talia grafu G jest co najmniej ℓ.

Skojarzenia.

Def. Skojarzeniem nazywamy zbiór rozłącznych krawędzi grafu. Skojarzeniem **maksymalnym** nazywamy skojarzenie, które nie jest podzbiorem żadnego innego skojarzenia. Skojarzeniem **doskonałym** nazywamy skojarzenie, które pokrywa każdy wierzchołek.
Def. Ścieżką naprzemienną względem skojarzenia M nazywamy ścieżkę, której krawędzie na przemian należą i nie należą do M. Ścieżka jest **powiększająca** względem skojarzenia M, jeśli jest naprzemienna względem M oraz zaczyna i kończy się w wierzchołku niepokrytym przez M.
Tw. Berge'a. Skojarzenie M jest największe wtw, gdy nie ma ścieżki powiększającej względem M.
Tw. Halla. Niech G będzie grafem dwudzielnym o klasach dwudzielności X, Y. W G istnieje skojarzenie pokrywające X wtw, gdy dla każdego $X' \subseteq X$ zachodzi $|N(X')| \geqslant |X'|$.

Sieci i przepływy.

Niech $N = (G, c, s, t)$ będzie siecią, $G = (V, A)$. Dla funkcji $f : A \to \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ definiujemy:

- Dla $v \in V$: $f^+(v) := \sum_{u: vu \in A} f(vu)$ i $f^-(v) := \sum_{u: uv \in A} f(uv)$
- Dla $S \subseteq V$: $f^+(S) := \sum_{\substack{uv \in A \\ u \in S \\ v \notin S}} f(uv)$ i $f^-(S) := \sum_{\substack{vu \in A \\ u \in S \\ v \notin S}} f(vu)$

Def. Funkcję $f : A \to \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ nazywamy **przepływem**, jeśli dla każdego $a \in A$ zachodzi $f(a) \leqslant c(a)$ oraz dla każdego $v \in V \setminus \{s, t\}$ zachodzi $f^+(v) = f^-(v)$.
Def. Wartość przepływu f to $\operatorname{val} f := f^+(s) - f^-(s)$.
Fakt. $f^+(s) - f^-(s) = f^-(t) - f^+(t)$.
Def. Dla dowolnego $S \subseteq V$ takiego, że $s \in S$ i $t \in \overline{S} := V \setminus S$, **przekrojem** $(S, \overline{S})$ nazywamy zbiór krawędzi o początku w S i końcu w $\overline{S}$. **Przepustowością** przekroju $K = (S, \overline{S})$ nazywamy $\operatorname{cap} K := \sum_{a \in K} c(a)$.
Lemat. Dla dowolnego przepływu f i dowolnego przekroju $(S, \overline{S})$ zachodzi $\operatorname{val} f = f^+(S) - f^-(S)$.
Tw. Dla dowolnego przepływu f i dowolnego przekroju K zachodzi $\operatorname{val} f \leqslant \operatorname{cap} K$. Jeśli $\operatorname{val} f = \operatorname{cap} K$, to f jest największym przepływem, a K najmniejszym przekrojem.
Def. Dla ścieżki P (niekoniecznie skierowanej), przepływu f i łuku a z P definujemy:

$$r(a) = \begin{cases} c(a) - f(a) & \text{jeśli } a \text{ jest krawędzią w przód,} \\ f(a) & \text{jeśli } a \text{ jest krawędzią w tył.} \end{cases}$$

Dla ścieżki P definiujemy $r(P) := \min_{a \text{ - łuk } P} r(a)$.

Ścieżka P jest **powiększająca** jeśli jest s-t ścieżką i $r(P) > 0$. Wówczas można zdefiniować przepływ $\hat{f}(a)$ jako:

$$\hat{f}(a) = \begin{cases} f(a) + r(P), & \text{jeśli } a \in A(P) \text{ jest łukiem w przód,} \\ f(a) - r(P), & \text{jeśli } a \in A(P) \text{ jest łukiem w tył} \\ f(a), & \text{jeśli } a \notin A(P). \end{cases}$$

Tw. Forda-Fulkersona. Przepływ f jest największy wtw. gdy nie ma ścieżki powiększającej.
Wniosek Jeśli f^* jest największym przepływem, a $\widetilde{K}$ najmniejszym przekrojem, to $\operatorname{cap} \widetilde{K} = \operatorname{val} f^*$.

Planarność.

Tw. Kuratowskiego. Graf G jest planarny wtw. gdy nie zawiera podpodziału $K_{3,3}$ lub K_5.
Tw. Dla grafu płaskiego G zachodzi $\sum_{f \in F(G)} \deg_G f = 2m$, gdzie przez $F(G)$ oznaczamy zbiór regionów (ścian) grafu płaskiego G.
Formuła Eulera. Dla spójnego grafu płaskiego G zachodzi $n - m + |F(G)| = 2$.
Lemat. Dla prostego grafu planarnego G o $n \geqslant 3$ wierzchołkach i talii k zachodzi $m \leqslant k(n-2)/(k-2)$.
Wniosek. Dla prostego grafu planarnego G o $n \geqslant 3$ wierzchołkach zachodzi $m \leqslant 3n - 6$.
Wniosek. Każdy graf planarny ma wierzchołek stopnia co najwyżej 5.
Tw. o czterech kolorach. Jeśli G jest planarny, to $\chi(G) \leqslant 4$.
Def. Dla grafu płaskiego G, jego **grafem dualnym** G^* nazywamy graf, którego wierzchołkami są regiony G i istnieje bijekcja między $E(G^*)$ a $E(G)$: krawędź e^* łączy dwa wierzchołki f_1, f_2 w G^* wtw, gdy odpowiadająca jej krawędź e z G jest incydentna z f_1 i f_2.

Teoria Ramseya.

Def. Liczba Ramseya, ozn. $R(t)$, to najmniejsze n takie, że przy dowolnym dwukolorowaniu krawędzi K_n znajdziemy jednokolorową kopię K_t.
Przez $R(t_1, t_2, \ldots, t_k)$ oznaczamy najmniejsze n takie, że przy dowolnym kolorowaniu K_n na k kolorów znajdziemy kopię K_{t_1} w pierwszym kolorze, K_{t_2} w drugim kolorze, ... lub K_{t_k} w k-tym kolorze.
Tw. Ramseya (Erdősa-Szekeresa). Dla każdego t zachodzi $R(t) \leqslant 4^t$.
Tw. Erdősa. Dla $t \geqslant 3$ zachodzi $R(t) > 2^{t/2}$.
Tw. Dla $s, t > 1$ zachodzi $R(s, t) \leqslant R(s, t-1) + R(s-1, t)$.
Wniosek. Dla $s, t \geqslant 1$ zachodzi $R(s, t) \leqslant \binom{s+t-2}{s-1} = \binom{s+t-2}{t-1}$.