Zad. 1	Zad. 2	Zad. 3	Zad. 4	Zad. 5	SUMA

1. (10p.) Niech G będzie grafem dwudzielnym o n wierzchołkach, który ma ścieżkę Hamiltona. Wyznacz rozmiar największego zbioru niezależnego w G.

Rozwiązanie. Pokażemy, że największy zbiór niezależy w G ma rozmiar $\lceil n/2 \rceil$. Najpierw zauważmy, że skoro G jest dwudzielny, to jego wierzchołki można podzielić na dwa zbiory niezależne, a z zasady szufladkowej jeden z tych zbiorów będzie miał co najmniej $\lceil n/2 \rceil$ wierzchołków.

Teraz pokażmy, że w G nie ma zbioru niezależnego rozmiaru większego niż $\lceil n/2 \rceil$. Przypuśćmy przeciwnie, niech S będzie takim zbiorem. Niech $P = v_1, v_2, \ldots, v_n$ będzie ścieżką Hamiltona. Podzielmy zbiór wierzchołków na podzbiory: $\{v_1, v_2\}$, $\{v_3, v_4\}$, aż do $\{v_{2\lfloor n/2 \rfloor - 1}, v_{2\lfloor n/2 \rfloor}\}$. Dodatkowo, jeśli n jest nieparzyste, dodajmy podzbiór $\{v_n\}$. Tym sposobem uzyskaliśmy podział zbioru wierzchołków na $\lceil n/2 \rceil$ podzbiory. Z zasady szufladkowej wynika, że co najmniej dwa wierzchołki z S są z jednego podzbioru. Oczywiście nie może być to podzbiór jednoelementowy, a wierzchołki w każdym podzbiorze dwuelementowym są sąsiadujące, więc nie mogą być w zbiorze niezależnym – sprzeczność. $\square$

2. (10p.) W grafie płaskim G o n wierzchołkach zewnętrzna ściana jest ograniczona cyklem długości k, a wszystkie ściany wewnętrzne są ograniczone cyklami długości 4. Wszystkie wierzchołki grafu G mają stopień 3 lub 4. Ile jest wierzchołków stopnia 3?

Rozwiązanie. Niech m będzie liczbą krawędzi, a ℓ liczbą ścian. Z formuły Eulera wynika, że (1) $\ell = m+2-n$.

Z lematu o uściskach dłoni dla G^* otrzymujemy (2):

$$2m = \sum_{f \in F(G)} \deg f = k + 4(\ell - 1),$$

czyli, po zestawieniu (1) i (2) mamy (3): $2m = 4n - k - 4$. Z lematu o uściskach dłoni dla G mamy (4) $2m = 3s + 4(n - s)$. Po porównaniu (3) i (4) otrzymujemy $s = k + 4$. □

3. (10p.) Niech $k, n_1, n_2, \ldots, n_k > 0$. Przez $[n]$ rozumiemy zbiór $\{1, 2, \ldots, n\}$. Rozważmy graf $G = (V, E)$, gdzie $V := [n_1] \times [n_2] \times \ldots \times [n_k]$, czyli wierzchołkami grafu G są wszystkie ciągi długości k, których i-ty wyraz pochodzi ze zbioru $[n_i]$, a $E := \{(x_1, \ldots, x_k)(y_1, \ldots, y_k) : (\forall i) x_i \neq y_i\}$, czyli krawędź między wierzchołkami występuje dokładnie wtedy, gdy różnią się one na każdej współrzędnej. Znaleźć $\chi(G)$.

Rozwiązanie. Niech $m := \min\{n_i : i \in [k]\}$. Zauważmy, że zbiór $\{(i, \ldots, i) : i \in [m]\}$ jest kliką w G o liczności m, a więc $\chi(G) \geqslant m$.

Niech j będzie takie, że $n_j = m$. Zdefiniujmy funkcję $f : V \to [m]$ następującym wzorem $f(x_1, \ldots, x_k) := x_j$, czyli wierzchołek kolorujemy jego j-tą współrzędną. Rozważmy dwa sąsiadujące wierzchołki $(x_1, \ldots, x_k)$ i $(y_1, \ldots, y_k)$. Mamy $f(x_1, \ldots, x_k) = x_j$ i $f(y_1, \ldots, y_k) = y_j$. Ponieważ wierzchołki te sąsiadują, to różnią się na wszystkich współrzędnych, w szczególności na j-tej, czyli $x_j \neq y_j$, co oznacza, że f jest poprawnym kolorowaniem grafu G, a więc $\chi(G) \leqslant m$. $\square$

4. (10p.) Wykazać, że dla każdych dwóch krawędzi 2-spójnego grafu $G = (V, E)$ istnieje cykl, który przez nie przechodzi.

Rozwiązanie. Niech $e = uv$ i $f = xy$ będą dowolnymi dwiema krawędziami grafu G.

Rozważymy dwa przypadki. Pierwszy $|\{u, v\} \cap \{x, y\}| = 1$. Przyjmijmy bez straty ogólności, że $u = x$. Graf $G - x$ jest spójny, więc istnieje w nim vy-ścieżka P. Wtedy $vPyfxev$ jest cyklem w G zawierającym krawędzie e i f.

Pozostał przypadek $|\{u, v\} \cap \{x, y\}| = 0$. Z twierdzenia Mengera istnieją dwie rozłączne $\{u, v\}$-$\{x, y\}$-ścieżki P i Q. Bez straty ogólności przyjmijmy, iż P jest u-x-ścieżką, a Q jest v-y-ścieżką. Ścieżki te nie przechodzą przez krawędzie e i f – inaczej nie byłyby $\{u, v\}$-$\{x, y\}$-ścieżkami – a więc $uPxfyQveu$ jest cyklem w G przechodzącym przez krawędzie e i f. (Zauważmy, że pierwszy przypadek mógł być również rozwiązany przy pomocy twierdzenia Mengera.) $\square$

5. (10p.) Niech $k > 0$ i $k \in \mathbb{N}$. Niech G będzie spójnym grafem eulerowskim takim, że $\Delta(G) \leq 2k + 1$. Udowodnij, że $\chi'(G) \leq 2k + 1$.

Rozwiązanie. W grafie eulerowskim wszystkie stopnie są parzyste. Również największy stopień jest parzysty, więc $\Delta(G) \leq 2k$. Z twierdzenia Vizinga otrzymujemy $\chi'(G) \leq \Delta(G) + 1 \leq 2k + 1$. $\square$