1. (10p.) Przypomnijmy, że średnicą grafu $G = (V, E)$ nazywamy $\max_{u,v \in V(G)} \operatorname{dist}(u, v)$, gdzie $\operatorname{dist}(u, v)$ jest liczbą krawędzi na najkrótszej ścieżce o końcach w u i v. Niech $k \geqslant 1$. Pokaż, że jeśli G jest k-spójnym grafem o średnicy co najmniej 3, to w G jest skojarzenie rozmiaru co najmniej k.

Rozwiązanie. Niech u i v będą wierzchołkami G, które nie mają wspólnych sąsiadów, takie istnieją z założenia o średnicy. Z twierdzenia Mengera wiemy, że w G istnieje k wewnętrznie wierzchołkowo-rozłącznych u-v-ścieżek $P_1, P_2, \ldots, P_k$. Zauważmy, że skoro u i v nie mają wspólnych sąsiadów, każda ze ścieżek P_i ma co najmniej trzy krawędzie, zatem zawiera pewną krawędź e_i, która nie zawiera żadnego z wierzchołków u, v. Znaczy to, że krawędzie e_i są parami rozłączne, czyli zbiór $\{e_i \ : i \in [k]\}$ jest szukanym skojarzeniem rozmiaru co najmniej k. $\square$

2. (10p.) Pokaż, że dla każdego $t \geqslant 1$, w każdym kolorowaniu krawędzi grafu pełnego o $R(k) + 2(t-1)$ wierzchołkach na czerwono i niebiesko znajdziemy t niebieskich kopii K_k lub t czerwonych kopii K_k.

Rozwiązanie. Zauważmy, że wystarczy pokazać, że w grafie tym będzie $2t-1$ jednokolorowych kopii K_k. Wtedy z zasady szufladkowej wywnioskujemy, że co najmniej t z nich będzie w tym samym kolorze (czerwonym lub niebieskim).

Pokażemy ten fakt indukcyjnie. Dla $t = 1$ mamy do czynienia z grafem o $R(k)$ wierzchołkach, więc, z definicji liczby Ramseya, znajduje się w nim jednokolorowa kopia K_k.

Przypuśćmy teraz, że $t > 1$ i stwierdzenie jest prawdziwe dla wszystkich $t' < t$. Rozważmy graf pełny o $n = R(k) + 2(t-1)$ wierzchołkach, nazwijmy go G, i dowolne kolorowanie krawędzi grafu G na czerwono i niebiesko. Ponieważ $n > R(k)$, wiemy, że w G znajduje się jednokolorowa kopia K_k, nazwijmy ją H_1. Niech x będzie dowolnym wierzchołkiem należącym H_1.

Usuńmy wierzchołek x z grafu G. Pozostał nam graf pełny o $n-1 = R(k)+2t-2 \geqslant R(k)$ wierzchołkach, zatem w tym grafie nadal znajduje się jednokolorowa kopia K_k, nazwijmy ją H_2. Oczywiście $H_1 \neq H_2$, bo usunęliśmy z grafu wierzchołek x. Niech y będzie dowolnym wierzchołkiem z H_2 i usuńmy z grafu też wierzchołek y. Pozostał nam graf pełny o $n-2 = R(k) + 2(t-2)$ wierzchołkach. Zatem, z założenia indukcyjnego, w grafie $G - \{x, y\}$ znajduje się $2(t-1)-1$ jednokolorowych kopii K_k. Po dołożeniu G_1 i G_2 mamy razem $2(t-1)-1+2 = 2t-1$ jednokolorowych kopii grafu K_k w grafie G. $\square$

3. (10p.) Niech $k \geqslant 2$ i niech $G = (V, E)$ będzie grafem o n wierzchołkach. Wykaż, że jeśli liczba poprawnych k-kolorowań grafu G jest mniejsza niż $k(k-1)^{n-1}$, to G nie jest drzewem.

(Dwa kolorowania $f_1, f_2 : V \to [k]$ utożsamiamy, jeśli są równe sensu stricto, czyli dla każdego $v \in V$ zachodzi $f_1(v) = f_2(v)$.)

Rozwiązanie. Wykażemy, że jeśli graf jest drzewem, to ma co najmniej $k(k-1)^{n-1}$ poprawnych k-kolorowań, oczywiście będzie z tego wynikała teza zadania.

Niech r będzie dowolnym wierzchołkiem drzewa G. Dla każdego $i \geqslant 0$, przez V_i oznaczmy zbiór wierzchołków w odległości i od wierzchołka r. (Czyli po prostu ukorzeniliśmy drzewo G w wierzchołku r.) Niech $d := \max\{i : V_i \neq \emptyset\}$. Zauważmy, że dla każdego $i > 0$ zachodzi: (1) każdy wierzchołek z V_i ma dokładnie jednego sąsiada w V_{i-1}, (2) nie ma sąsiadów w V_j dla $j < i - 1$, oraz (3) nie ma sąsiadów w V_i. Ostatnia własność wynika z faktu, że G jest drzewem.

Skonstruujmy permutację $(v_1, \ldots, v_n)$ zbioru V tak, że pierwszym jej wyrazem jest r, potem – w dowolnej kolejności – występują elementy zbioru V_1, potem elementy zbioru V_2, również w dowolnej kolejności, itd. Na końcu stoją elementy zbioru V_d, oczywiście w dowolnej kolejności.

Skonstruujemy poprawne k-kolorowanie f, przypisując kolory wierzchołkom w kolejności $(v_1, \ldots, v_n)$ w taki sposób, aby żaden wierzchołek nie dostał koloru takiego, jak jego już pokolorowany sąsiad. Zauważmy, że z własności (1),(2),(3) wynika, że każdy wierzchołek ma co najwyżej jeden zablokowany kolor, więc ponieważ $k \geqslant 2$, znajdziemy poprawne k-kolorowanie.

Na ile sposobów możemy skonstruować f? Wierzchołek v_1 może zostać pokolorowany na k sposobów, a dla $i > 1$ wierzchołek v_i na $k - 1$ sposobów, bo dokładnie jeden z kolorów jest zablokowany. Zatem liczba możliwych kolorowań f uzyskanych przez naszą procedurę to $k(k-1)^{n-1}$, co oznacza to, że drzewo ma co najmniej $k(k-1)^{n-1}$ poprawnych k-kolorowań.

(Można też zauważyć, że każde poprawne k-kolorowanie można wygenerować w sposób opisany powyżej, czyli drzewo ma dokładnie $k(k-1)^{n-1}$ poprawnych kolorowań.) $\square$

4. (10p.) Pokaż, że krawędzie każdego grafu $G = (V, E)$ można podzielić $E = E_1 \cup E_2$ ($E_1 \cap E_2 = \emptyset$, ale może być $E_1 = \emptyset$ lub $E_2 = \emptyset$) tak, że podgraf grafu G indukowany przez E_1 jest lasem, a podgraf grafu G indukowany przez E_2 ma wszystkie wierzchołki parzystego stopnia.

Rozwiązanie. Twierdzenie udowodnimy indukcyjnie względem liczby cykli grafu G. Jeśli G nie ma cykli, to jest lasem. Zatem szukany podział to $E_1 := E$ i $E_2 := \emptyset$.

Przypuśćmy teraz, że G ma co najmniej jeden cykl i twierdzenie jest prawdziwe dla grafów o mniejszej liczbie cykli. Niech C będzie cyklem (prostym) w G. Z założenia indukcyjnego krawędzie grafu $G' := G - E(C)$ możemy podzielić na dwa zbiory F_1 i F_2 takie, że $G'[F_1] = G[F_1]$ jest lasem, a $G'[F_2] = G[F_2]$ ma wszystkie wierzchołki parzystego stopnia. Zdefiniujmy $E_1 := F_1$ oraz $E_2 := F_2 \cup E(C)$. Oczywiście $E_1 \cup E_2$ jest podziałem zbioru E takim, że $G[E_1]$ jest lasem.

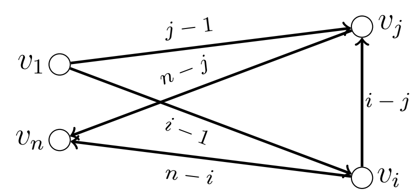
Pokażemy, że każdy wierzchołek $G[E_2]$ ma parzysty stopień. Rozważmy dowolny $v \in V(G[E_2])$. Jeśli v nie należy do cyklu C, to $\deg_{G[E_2]} v = \deg_{G[F_2]} v$. Jeśli v należy to C, to $\deg_{G[E_2]} v = \deg_{G[F_2]} v + 2$. Ponieważ z założenia indukcyjnego stopień v w grafie $G'[F_2] = G[F_2]$ jest parzysty, otrzymujemy, że stopień v w $G[E_2]$ jest parzysty. $\square$

5. (10p.) Rozważmy graf skierowany $G = (V, A)$ o nieparzystej liczbie wierzchołków, w którym $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ oraz dla $j > i$ zachodzi $v_iv_j \in A$ jeśli $|i-j|$ jest liczbą nieparzystą oraz $v_jv_i \in A$ jeśli $|i-j|$ jest parzyste. Dla każdego $v_iv_j \in A$ zdefiniujmy $c(v_iv_j) = |i-j|$. Wyznacz wartość największego przepływu w $N = (G, c, v_1, v_n)$.

Rozwiązanie. Wiemy, że dla dowolnego f zachodzi $\mathrm{val}(f) = f^+(s) - f^-(s) \leqslant f^+(s)$. Zauważmy, że z definicji sieci N możemy oszacować

$$f^+(s) \leqslant c(v_1v_2) + c(v_1v_4) + \ldots + c(v_1v_{n-1}) = 1 + 3 + \ldots + n - 2 = \frac{(n-1)^2}{4}.$$

Pokażemy, że w N istnieje przepływ o wartości $\frac{(n-1)^2}{4}$, oczywiście będzie on największy. Zdefiniujmy funkcję $f : A \to \mathbb{N}$ w następujący sposób:



$$f(v_iv_j) = \begin{cases} c(v_iv_j) & \text{jeśli } i = 1 \text{ lub } j = n, \\ i - j & \text{jeśli } i \text{ oraz } j \text{ są parzyste oraz } j + i = n + 1, \\ 0 & \text{w pozostałych przypadkach.} \end{cases}$$

Pokażemy, że f jest przepływem. Zauważmy, że w każdym przypadku spełniony jest warunek $f(v_iv_j) \leqslant c(v_iv_j)$ (w dwóch pierwszych zachodzi równość), trzeba więc pokazać jeszcze, że f spełnia prawo Kirchoffa.

Jeśli $i \notin \{1, n\}$ jest nieparzyste, zauważmy, że wówczas $f^+(v_i) = 0 = f^-(v_i)$ (wszystkie łuki zawierające v_i mają wartość 0). Rozważmy więc v_i, takie że i jest parzyste. Oczywiście $f(v_1v_i) = i - 1$ oraz $f(v_iv_n) = n - i$, ponadto istnieje dokładnie jedno $j \in \{2, \ldots, n-1\}$, takie że $j + i = n + 1$. Z tego wynika, że:

- jeśli $j > i$, wtedy $v_jv_i \in A(G)$ oraz $f(v_jv_i) = j - i = n - 2i + 1$. Wówczas $f^+(v_i) - f^-(v_i) = (i-1) + (n-2i+1) - (n-i) = 0$, więc warunek Kirchoffa jest spełniony.
- jeśli $j < i$, wtedy $v_iv_j \in A(G)$ oraz $f(v_iv_j) = i - j = 2i - n - 1$. Wówczas $f^+(v_i) - f^-(v_i) = (i-1) - (2i-n-1) - (n-i) = 0$, więc warunek Kirchoffa jest spełniony.
- jeśli $i = j = \frac{n+1}{2}$, jedynymi niezerowymi łukami zawierającymi v_i są v_1v_i oraz v_iv_n. Wówczas jednak $f^+(v_i) = \frac{n+1}{2} - 1 = n - \frac{n+1}{2} = f^-(v_i)$.

Dostajemy więc, że f jest przepływem, dla którego $f^+(s) = 1 + 3 + \ldots + n - 2 = \frac{(n-1)^2}{4}$, co kończy dowód. $\square$