1. (10p.) Niech $m \geqslant n \geqslant 1$. Zdefiniujmy graf $G = (V, E)$, którego wierzchołkami są wszystkie funkcje różnowartościowe $f : \{0, \ldots, n-1\} \to \{0, \ldots, m-1\}$, a $E = \{fg \mid \forall_{x \in \{0,\ldots,n-1\}}\ f(x) \neq g(x)\}$. Wyznacz $\chi(G)$.

Rozwiązanie. Pokażemy najpierw, że $\chi(G) \geqslant m$. Dla $i \in \{0, \ldots, m-1\}$, niech $f_i : \{0, \ldots, n-1\} \to \{0, \ldots, m-1\}$ będzie funkcją określoną następująco: $f_i(x) := x + i \pmod m$. Ponadto zdefiniujmy $F := \{f_i \mid i \in \{0, \ldots, m-1\}\}$. Sprawdźmy, że $F \subseteq V$, czyli że funkcje z F są różnowartościowe. Załóżmy, że dla $f_i \in F$ zachodzi $f_i(x) = f_i(y)$ dla pewnych $x, y \in \{0, \ldots, n-1\}$. Wtedy $x + i \equiv y + i \pmod m$, co oznacza, że $x \equiv y \pmod m$. Ponieważ $x, y \in \{0, \ldots, n-1\} \subseteq \{0, \ldots, m-1\}$, otrzymujemy, że $x = y$. Zatem f_i jest różnowartościowa.

Pokażmy teraz, że $G[F]$ jest kliką. Niech $f_i, f_j \in F$ dla $i \neq j$. Przypuśćmy, że $f_i f_j \notin E$, czyli istnieje $x \in \{0, \ldots, n-1\}$ taki, że $f_i(x) = f_j(x)$. Wtedy $x + i \equiv x + j \pmod m$, więc $i \equiv j \pmod m$. Ponieważ $i, j \in \{0, \ldots, m-1\}$, to $i = j$ – sprzeczność. Zatem $G[F]$ jest kliką o m wierzchołkach, co oznacza, że $\chi(G) \geqslant m$.

Zdefiniujmy kolorowanie $c : V \to \{0, \ldots, m-1\}$ jako $c(f) := f(0)$. Ponieważ dla $fg \in E$ zachodzi $f(x) \neq g(x)$ dla wszystkich $x \in \{0, \ldots, n-1\}$, to w szczególności $c(f) = f(0) \neq g(0) = c(g)$. Stąd c jest poprawnym m-kolorowaniem grafu G i $\chi(G) \leqslant m$. Zatem $\chi(G) = m$. $\square$

2. (10p.) Niech G będzie grafem pełnym o $2k-1$ wierzchołkach dla $k \geqslant 1$. Pokaż, że w dowolnym kolorowaniu krawędzi G na czerwono i niebiesko znajdziemy niebieski cykl nieparzysty lub czerwoną kopię K_k.

Rozwiązanie. Ustalmy dowolne kolorowanie krawędzi G na czerwono i niebiesko. Pokażemy, że jeśli w G nie ma niebieskiego cyklu nieparzystego, to musi być czerwona kopia K_k. Rozważmy graf G' otrzymany z G poprzez usunięcie czerwonych krawędzi. Ponieważ w G nie było niebieskich nieparzystych cykli, to G' nie ma nieparzystych cykli. Z ćwiczeń wiemy, że wtedy G' jest dwudzielny. Ponieważ w G' mamy tyle wierzchołków, co w G, tzn. $2k-1$, to w jednej z klas dwudzielności G' musi być co najmniej $\lceil (2k-1)/2 \rceil = k$ wierzchołków. Niech X będzie podzbiorem jednej z klas dwudzielności G' i taki, że $|X| = k$. Ponieważ X jest zbiorem niezależnym w G', to wszystkie krawędzie pomiędzy wierzchołkami z X w G musiały być pokolorowane na czerwono. Zatem znaleźliśmy czerwoną kopię K_k w G. □

3. (10p.) Graf jest *zewnętrznie planarny* jeśli jest planarny i istnieje jego płaski rysunek, w którym każdy wierzchołek jest incydentny ze ścianą zewnętrzną.

Niech G będzie prostym grafem zewnętrznie planarnym o parzystej liczbie krawędzi. Ustalmy jego płaski rysunek jak w definicji powyżej; niech $F(G)$ oznacza zbiór regionów. Pokaż, że $|F(G)| \leqslant \frac{|E(G)|}{2}$.

Rozwiązanie. Niech G' będzie grafem otrzymanym z G przez dodanie nowego wierzchołka u i połączenie go ze wszystkimi wierzchołkami G. Zatem

$$\begin{aligned} |V(G')| &= |V(G)| + 1 \\ |E(G')| &= |E(G)| + |V(G)|. \end{aligned}$$

Zauważmy, że G' jest planarny – wystarczy u umieścić na ścianie zewnętrznej. Na wykładzie pokazaliśmy, że:

$$\begin{aligned} |E(G')| &\leqslant 3|V(G')| - 6 \\ |E(G)| + |V(G)| &\leqslant 3(|V(G)| + 1) - 6 \\ |E(G)| + 3 &\leqslant 2|V(G)|. \end{aligned}$$

Ponieważ liczba krawędzi grafu G jest parzysta, a $|V(G)|$ musi być całkowite, otrzymujemy

$$|V(G)| \geqslant \frac{|E(G)|}{2} + 2.$$

Podstawiając to do formuły Eulera (dla grafu G), dostajemy

$$\begin{aligned} |E(G)| - |F(G)| + 2 &= |V(G)| \geqslant \frac{|E(G)|}{2} + 2 \\ \frac{|E(G)|}{2} &\geqslant |F(G)|. \end{aligned}$$

$\square$

4. (10p.) Niech $n > 3$, a $G = (V, E)$ będzie grafem o n wierzchołkach spełniającym $\Delta(G) < n-1$. Dodatkowo załóżmy, że każde dwa wierzchołki tego grafu mają dokładnie jednego wspólnego sąsiada. Udowodnij, że:

a) $\forall_{u,v \in V}\ (uv \notin E \Rightarrow \deg_G(u) = \deg_G(v))$;

b) G jest grafem regularnym.

Rozwiązanie.

a) Niech u i v będą dowolnymi niesąsiadującymi wierzchołkami grafu G. Rozpatrzmy następującą funkcję $f : N_G(u) \to N_G(v)$, gdzie $f(x)$ to wspólny sąsiad wierzchołków x i v. Ze względu na założenie, że każde dwa wierzchołki mają dokładnie jednego sąsiada funkcja f jest dobrze zdefiniowana. Pokażemy, że f jest różnowartościowa. Niech x i y będą dwoma sąsiadami wierzchołka u. Przypuśćmy, że $f(x) = f(y)$. Ponieważ u nie jest sąsiadem wierzchołka v, to $f(x) \neq u$, a więc u i $f(x)$ są dwoma wspólnymi sąsiadami wierzchołków x i y, co stoi w sprzeczności z założeniami zadania. Stąd $f(x) \neq f(y)$, a w związku z dowolnością wyboru wierzchołków x i y otrzymujemy, że f jest różnowartościowa. Stąd $|N_G(u)| \leqslant |N_G(v)|$. Zupełnie analogicznie, zamieniając rolami wierzchołki u i v w powyższym rozumowaniu, możemy otrzymać $|N_G(v)| \leqslant |N_G(u)|$, a więc $|N_G(u)| = |N_G(v)|$, czyli $\deg_G(u) = \deg_G(v)$. Ponieważ u i v były wybrane dowolnie, dowód jest zakończony.

b) Niech v będzie dowolnym wierzchołkiem grafu G. Zdefiniujmy $X := \{x \in V : \deg_G(x) = \deg_G(v)\}$, $Y := V - X$. Z pewnością $X \neq \emptyset$, bo $v \in X$. Przypuśćmy, że $Y \neq \emptyset$. Zauważmy, że w związku z podpunktem a) każdy wierzchołek ze zbioru Y musi sąsiadować z każdym wierzchołkiem ze zbioru X. Oznacza, że oba te zbiory mają co najmniej dwa elementy, bo inaczej byłoby $\Delta(G) = n - 1$. Niemniej wtedy dowolne dwa elementy zbioru X są wspólnymi sąsiadami dowolnych dwóch elementów zbioru Y, co jest sprzecznością, a więc musi być $Y = \emptyset$. $\square$

5. (10p.) Dla sieci N, niech $\mathrm{mf}(N)$ oznacza wartość największego przepływu w N. Rozważmy sieć $N = (G, c, s, t)$, gdzie $G = (V, A)$, a c przyjmuje tylko skończone wartości. Dla łuku $a \in A$ niech c_a będzie funkcją przepustowości, otrzymaną z c przez zwiększenie przepustowości a o 1 (pozostałe przepustowości pozostają bez zmian) i zdefiniujmy $N_a = (G, c_a, s, t)$. Mówimy, że łuk a jest *ważny* jeśli $\mathrm{mf}(N_a) > \mathrm{mf}(N)$. Pokaż, że łuk jest ważny wtedy i tylko wtedy, gdy należy do każdego najmniejszego przekroju w N.

Rozwiązanie. Ponieważ przekroje w sieci N i w sieci N_a to te same zbiory krawędzi, dla czytelności przez $\mathrm{cap}(K)$ będziemy oznaczać przepustowość przekroju K w sieci N, zaś przez $\mathrm{cap}_a(K)$ przepustowość przekroju K w sieci N_a.

Zauważmy, że dla przekroju $K \subseteq A$ mamy

$$\mathrm{cap}_a(K) = \sum_{e \in K} c_a(e) \geqslant \sum_{e \in K} c(e) = \mathrm{cap}(K) \text{ i równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy } a \notin K. \tag{1}$$

($\rightarrow$) Niech K będzie najmniejszym przekrojem w sieci N i niech a będzie łukiem, który nie należy do K. Pokażemy, że a nie jest ważny.

Zauważmy, że K jest najmniejszym przekrojem w sieci N_a. Istotnie, przypuśćmy przeciwnie, że istnieje w N_a przekrój K', dla którego $\mathrm{cap}_a(K') < \mathrm{cap}_a(K)$. Wówczas, na podstawie (1), otrzymujemy $\mathrm{cap}(K') < \mathrm{cap}_a(K) = \mathrm{cap}(K)$, co przeczy temu, że K jest najmniejszy.

Z twierdzenia Forda-Fulkersona otrzymujemy, że $\mathrm{mf}(N_a) = \mathrm{cap}_a(K) = \mathrm{cap}(K) = \mathrm{mf}(N)$, czyli a nie jest ważny.

($\leftarrow$) Teraz przypuśćmy, że a należy do każdego najmniejszego przekroju w N. Zaprzeczając tezę, przypuśćmy, że nie jest ważny, czyli $\mathrm{mf}(N) \geqslant \mathrm{mf}(N_a)$.

Niech K będzie najmniejszym przekrojem w N_a, oczywiście $\mathrm{cap}_a(K) = \mathrm{mf}(N_a)$. Jeśli $a \in K$, to na podstawie (1) otrzymujemy, że $\mathrm{cap}(K) < \mathrm{cap}_a(K) = \mathrm{mf}(N_a) \leqslant \mathrm{mf}(N)$, sprzeczność. Zatem $a \notin K$, więc $\mathrm{cap}(K) = \mathrm{cap}_a(K)$.

Skoro $a \notin K$, otrzymujemy, że K nie jest najmniejszym przekrojem w sieci N, więc istnieje przekrój K' taki, że $\mathrm{cap}(K') < \mathrm{cap}(K) = \mathrm{cap}_a(K) = \mathrm{mf}(N_a) \leqslant \mathrm{mf}(N)$, sprzeczność. Zatem łuk a jest ważny. $\square$