1. (10p.) Dla grafu spójnego G, niech graf G' będzie grafem otrzymanym z G przez dwukrotne podpodzielenie każdej krawędzi. Dokładniej, każdą krawędź G zamieniamy na ścieżkę o trzech krawędziach, której końcami są końce oryginalnej krawędzi z G. Zbadaj, ile wynosi $\chi(G')$.

Rozwiązanie. Rozważmy przypadki, w zależności od liczby chromatycznej G.

Przypadek 1: $\chi(G) = 1$**.** Zauważmy, że wtedy $G = G'$ i oczywiście $\chi(G') = 1$.

Przypadek 2: $\chi(G) = 2$**.** Graf G jest zatem dwudzielny, niech X i Y będą klasami dwudzielności. Dla krawędzi xy z G, gdzie $x \in X$ i $y \in Y$, wierzchołki odpowiadającej jej ścieżki w G' oznaczmy jako x, a_{xy}, b_{xy}, y.

Zauważmy, że graf G' jest również dwudzielny, z klasami dwudzielności:

$$X \cup \{b_{xy} \mid xy \in E(G) \wedge x \in X, y \in Y\}$$
$$Y \cup \{a_{xy} \mid xy \in E(G) \wedge x \in X, y \in Y\}.$$

Z drugiej strony ma on co najmniej jedną krawędź (bo $\chi(G) \geqslant 2$), zatem $\chi(G') = 2$.

Przypadek 3: $\chi(G) \geqslant 3$**.** Pokażemy, że $\chi(G') = 3$. Z jednej strony, graf G' ma poprawne 3-kolorowanie, zdefiniowane następująco. Oryginalne wierzchołki z G tworzą zbiór niezależny, więc można je wszystkie pokolorować jednym kolorem. Po ich usunięciu w grafie zostają wierzchołki wewnętrzne ścieżek, którymi zastąpiliśmy krawędzie G. Dokładniej, otrzymujemy graf o $|E(G)|$ składowych, z których każda jest izomorficzna z K_2. Łatwo zatem pokolorować ten graf na dwa kolory. Łącznie użyliśmy trzech kolorów.

Pokażmy jeszcze, że $\chi(G') \geqslant 3$. Skoro $\chi(G) > 2$, graf G nie jest dwudzielny, zatem zawiera cykl C długości k, gdzie k jest nieparzyste. Zdefiniujmy zbiór E' krawędzi G' następująco: dla każdej krawędzi z cyklu C, umieszczamy w E' trzy krawędzie w G', które jej odpowiadają. Zauważmy, że podgraf G' indukowany przez E' to cykl o $3k$ krawędziach, zatem G' zawiera cykl nieparzysty, czyli $\chi(G') \geqslant 3$.

Podsumowując:

$$\chi(G') = \begin{cases} 1 & \text{jeśli } \chi(G) = 1, \\ 2 & \text{jeśli } \chi(G) = 2, \\ 3 & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

$\square$

2. (10p.) Niech $G = (V, E)$ będzie grafem planarnym o co najmniej trzech wierzchołkach. Pokaż, że zbiór V można podzielić na trzy zbiory V_1, V_2, V_3 w taki sposób, że dla każdego $i \in \{1, 2, 3\}$ graf $G[V_i]$ jest lasem.

Przypomnijmy, że dla zbioru $U \subseteq V$ przez $G[U]$ oznaczamy podgraf G indukowany przez U, czyli graf $G' = (U, E')$, gdzie $E' \subseteq E$ to *wszystkie* krawędzie grafu G o obu końcach w U.

Rozwiązanie. Indukcja po liczbie n wierzchołków grafu.

Jeśli $n = 3$, do każdego zbioru V_i możemy wziąć inny wierzchołek G. Oczywiście każdy z trzech podgrafów indukowanych jest lasem. Przypuśćmy więc, że twierdzenie zachodzi dla wszystkich grafów planarnych o $n-1$ wierzchołkach, i niech G będzie grafem o $n > 4$ wierzchołkach.

Z wykładu wiemy, że w każdym grafie planarnym istnieje wierzchołek stopnia co najwyżej 5. Niech v będzie wierzchołkiem stopnia co najwyżej 5 w G i niech $G' = G - v$. Z założenia indukcyjnego wiemy, że $V(G')$ można podzielić na zbiory V_1', V_2', V_3' takie, że dla każdego $i \in \{1, 2, 3\}$ graf $G'[V_i']$ jest lasem.

Ponieważ v ma stopień co najwyżej 5 w G, z zasady szufladkowej wynika, że istnieje $i \in \{1, 2, 3\}$ takie, że v ma co najwyżej jednego sąsiada w V_i'. Bez utraty ogólności przyjmijmy, że w $i = 1$. Zdefiniujmy $V_1 = V_1' \cup \{v\}, V_2 = V_2', V_3 = V_3'$.

Pokażemy, że V_1, V_2, V_3 jest szukanym podziałem. Ponieważ $G[V_2] = G'[V_2']$ oraz $G[V_3] = G'[V_3']$, z założenia indukcyjnego wiemy, że każdy z grafów $G[V_2]$ oraz $G[V_3]$ jest lasem. Rozważmy zatem $G[V_1]$. Zauważmy, że $G[v_1] - \{v\} = G'[V_1]$, czyli jest lasem. Zatem jeśli $G[V_1]$ ma cykl, musi on zawierać wierzchołek v. Zauważmy jednak, że v nie może należeć do żadnego cyklu w $G[V_1]$, ponieważ ma stopień 1. To kończy dowód. $\square$

3. (10p.) Niech $n > 2$ i niech X będzie dowolnym zbiorem liczności n. Zdefiniujmy graf

$$G := (2^X, \{AB : A \cap B = \emptyset\}),$$

czyli graf, którego wierzchołkami są wszystkie podzbiory zbioru X, a wierzchołki A i B sąsiadują ze sobą wtedy, gdy są rozłącznymi podzbiorami zbioru X.

Zbadaj, czy graf G ma drogę Eulera i czy ma ścieżkę Hamiltona.

Rozwiązanie. Zauważmy, że $\emptyset$ jest połączony krawędzią z każdym innym wierzchołkiem, a więc graf G jest spójny.

Rozważmy wierzchołek A grafu G różny od $\emptyset$ i X. Mamy $N_G(A) = 2^{X-A}$ (uwaga na boku: dla $A = \emptyset$ to nie jest prawda), czyli sąsiedzi wierzchołka A, to podzbiory zbioru $X - A$. To oznacza, że $\deg_G(A) = |2^{X-A}| = 2^{|X-A|}$, a w związku z tym, że $A \neq X$ liczba ta jest parzysta.

Oznacza to, że G jest spójny i ma co najwyżej dwa wierzchołki nieparzystego stopnia, a zatem ma drogę Eulera.

Zauważmy dalej, że dla dowolnego $x \in X$ wierzchołek $X - \{x\}$ sąsiaduje jedynie z $\emptyset$ i z $\{x\}$, a zatem ma stopień 2. Oznacza to, że w hipotetycznej ścieżce Hamiltona w G musiałyby być obecne wszystkie krawędzie typu $\{\emptyset, X - \{x\}\}$ i $\{\{x\}, X - \{x\}\}$. Ponieważ $|X| > 2$, to w konsekwencji wierzchołek $\emptyset$ musiałby na takiej hipotetycznej ścieżce pojawić się co najmniej dwa razy, co wyklucza istnienie takiej ścieżki. $\square$

4. (10p.) Standardową talię 52 kart ułożono w prostokąt 4×13. Wykaż, że można wybrać 13 kart, po jednej z każdej kolumny prostokąta, tak, aby na ręku mieć kartę każdej możliwej wartości (czyli od dwójki do asa).

Formalnie talia kart to zbiór $[13] \times [4]$, gdzie elementy zbioru $[13]$ nazywamy wartościami, a elementy zbioru $[4]$ kolorami.

Rozwiązanie. Zdefiniujmy graf dwudzielny G, którego jedną klasę dwudzielności stanowić będą kolumny prostokąta, a drugą zbiór wartości kart (czyli dwójka, trójka, czwórka, piątka, szóstka, siódemka, ósemka, dziewiątka, dziesiątka, walet, dama, król, as), a kolumna k będzie sąsiadowała w G z wartością w, jeśli w kolumnie k prostokąta leży co najmniej jedna karta o wartości w.

Pokażemy, że graf G spełnia warunek Halla. Niech S będzie dowolnym podzbiorem zbioru kolumn prostokąta. Przypuśćmy, że łącznie w tych kolumnach jest mniej niż $|S|$ wartości. Ponieważ każda wartość jest reprezentowana w talii przez 4 karty, to oznacza to, iż w kolumnach ze zbioru S leży co najwyżej $4(|S| - 1)$ kart, co jest sprzecznością, jako że jest ich tam dokładnie $4|S|$.

Z twierdzenia Halla wnioskujemy, że w G istnieje skojarzenie pokrywające zbiór kolumn. Krawędzie tego skojarzenia wskazują nam karty, które musimy wybrać, aby otrzymać karty spełniające warunki zadania. $\square$

5. (10p.) Pokaż, że dla każdego $k > 0$ zachodzi $R(k, k, k, k) \leqslant R(R(k))$.

Rozwiązanie. Ustalmy $k > 0$ i rozważmy graf pełny G o $R(R(k))$ wierzchołkach i ustalmy dowolne pokolorowanie jego krawędzi na 4 kolory: żółty, czerwony, niebieski, zielony. Aby wykazać nierówność z zadania, należy pokazać, że w jednym z kolorów istnieje klika o k wierzchołkach.

Zdefiniujmy najpierw kolorowanie krawędzi G na dwa kolory, w taki sposób, że krawędzie pokolorowane na kolor żółty lub czerwony dostają kolor pomarańczowy, a krawędzie pokolorowane na kolor niebieski lub zielony dostają kolor turkusowy. Ponieważ G ma $R(R(k))$ wierzchołków, to z definicji liczby Ramseya, istnieje pomarańczowa klika o $R(k)$ wierzchołkach lub turkusowa klika o $R(k)$ wierzchołkach. W obu przypadkach, przywróćmy pierwotne kolorowanie krawędzi w tej klice. W pierwszym przypadku wszystkie krawędzie mają kolor żółty lub czerwony, a w drugim przypadku wszystkie krawędzie mają kolor niebieski lub zielony. Ponieważ ta klika ma $R(k)$ wierzchołków, to w pierwszym przypadku mamy żółtą klikę o k wierzchołkach lub czerwoną klikę o k wierzchołkach. Podobnie, w drugim przypadku mamy niebieską klikę o k wierzchołkach lub zieloną klikę o k wierzchołkach, co kończy dowód. $\square$