1. (10p.) Niech $k \geqslant 2$ i niech G będzie grafem takim że $\delta(G) \geqslant k$, gdzie przez $\delta(G)$ oznaczamy najmniejszy stopień wierzchołka w G. Pokaż, że w G istnieje cykl długości co najmniej $k+1$.

Rozwiązanie. Niech $P = v_1, v_2, \ldots, v_t$ będzie najdłuższą ścieżką w G. Zauważmy, że każdy sąsiad v wierzchołka v_1 musi leżeć na P, bo inaczej $v, v_1, \ldots, v_t$ byłoby ścieżką dłuższą niż P, sprzeczność. Niech i będzie największym indeksem takim, że v_i jest sąsiadem v_1. Zauważmy, że $i \geqslant k+1$, bo $\deg v_1 \geqslant k$, a $|N(v_1) \cap \{v_2, v_3, \ldots, v_k\}| \leqslant k-1$. Skoro $k \geqslant 2$, to $i \geqslant 3$, zatem otrzymujemy, że $v_1, \ldots, v_i$ jest cyklem długości co najmniej $k+1$, co kończy dowód. $\square$

2. (10p.) Niech $d \geqslant 1$ i niech $G = (V, E)$ będzie grafem takim, że istnieje podział (X, Y) zbioru V, który spełnia następujące warunki: (1) $G[X]$ jest cyklem, (2) Y jest zbiorem niezależnym, (3) dla każdego wierzchołka $x \in X$ zachodzi $\deg_G x \leqslant d$, (4) każdy wierzchołek $y \in Y$ należy do co najmniej d trójkątów. Pokaż, że G jest hamiltonowski.

Rozwiązanie. Niech C będzie cyklem indukowanym przez wierzchołki z X. Rozszerzymy cykl C do cyklu Hamiltona w G. W tym celu stwórzmy dwudzielny graf pomocniczy H, którego jedną klasą dwudzielności będzie $E(C)$, a drugą Y. Krawędź w H pomiędzy $uv \in E(C)$ i $y \in Y$ istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy $u, v \in N_G(y)$.

Pokażemy, że w H istnieje skojarzenie pokrywające Y. W tym celu sprawdzimy warunek Halla. Niech $S \subseteq Y$. Zauważmy, że dla dowolnego wierzchołka $y \in Y$, z faktu, że y należy do co najmniej d trójkątów i Y jest zbiorem niezależnym, wynika, że $\deg_H y \geqslant d$. Ponieważ stopień w G każdego wierzchołka z X jest co najwyżej d, to również stopień w H dowolnego $e \in E(C)$ jest co najwyżej d. Zatem z jednej strony, sumując stopnie wierzchołków z S, w $H[S \cup N_H(S)]$ jest co najmniej $|S| \cdot d$ krawędzi, a z drugiej strony, sumując stopnie wierzchołków z $N_H(S)$, tych krawędzi jest co najwyżej $|N(S)| \cdot d$. Łącząc obie nierówności i dzieląc przez d otrzymujemy, że $|S| \leqslant |N_H(S)|$. Na mocy twierdzenia Halla w H istnieje skojarzenie pokrywające Y.

Pozostaje skonstruować cykl Hamiltona w G. Ponieważ w grafie H istnieje skojarzenie pokrywające Y, to każdemu wierzchołkowi $y \in Y$ można przyporządkować inną krawędź $e_y = u_y v_y$ z cyklu C, dla której $yu_y, yv_y \in E$. Niech C' będzie cyklem skonstruowanym w następujący sposób. Zaczynamy od cyklu C i dla każdej krawędzi $e_y = u_y v_y$, która jest przyporządkowana pewnemu wierzchołkowi $y \in Y$, wstawiamy y pomiędzy u_y i v_y. Ponieważ y sąsiaduje z u_y i v_y, to C' faktycznie jest cyklem, a ponieważ każdemu wierzchołkowi z Y przyporządkowaliśmy jakąś krawędź, to jest to cykl Hamiltona w G. $\square$

3. (10p.) Niech $k \geqslant 3$ będzie liczbą naturalną. Niech H będzie grafem k-spójnym i niech G_1 i G_2 będą grafami takimi że $|V(G_1) \cap V(G_2)| < k$. Załóżmy, że graf $G = (V(G_1) \cup V(G_2), E(G_1) \cup E(G_2))$ zawiera pewien podpodział grafu H, oznaczmy go jako H'. Niech $T = \{v \in V(H') \ : \ \deg_{H'} v \geqslant 3\}$. Pokaż, że $T \subseteq V(G_1)$ lub $T \subseteq V(G_2)$.

Rozwiązanie. Skoro H' jest podpodziałem grafu H, zachodzi $V(H) \subseteq V(H')$. Ponadto, graf H' został otrzymany z grafu H przez zastąpienie każdej krawędzi $uv \in E(H)$ ścieżką $\phi(uv)$ o końcach w wierzchołkach u i v w taki sposób, że dla dwóch różnych krawędzi $e, f \in E(H)$ ścieżki $\phi(e)$ i $\phi(f)$ są wewnętrznie rozłączne ($\phi(uv)$ może być po prostu krawędzią uv). W szczególności, dla każdej krawędzi $e \in E(H)$ każdy wierzchołek wewnętrzny ścieżki $\phi(e)$ jest w grafie H' stopnia 2. Z drugiej strony, dla każdego $v \in V(H)$ mamy $\deg_{H'} v = \deg_H v \geqslant k \geqslant 3$ (gdzie przedostatnia nierówność wynika z k-spójności H). Podsumowując, mamy $T = V(H)$.

Załóżmy, że istnieją $u, v \in T$ takie, że $u \in V(G_1) \setminus V(G_2)$ oraz $v \in V(G_2) \setminus V(G_1)$. Zauważmy, że $V(G_1) \cap V(G_2)$ jest u-v-separatorem w G. W szczególności oznacza to, że $uv \notin E(G)$. Ponadto, $|V(G_1) \cap V(G_2)| < k$, więc nie może istnieć w G więcej niż $k - 1$ wewnętrznie rozłącznych u-v-ścieżek. (*)

Z drugiej strony, ponieważ H jest grafem k-spójnym, z twierdzenia Mengera wiemy, że w H istnieje k wewnętrznie rozłącznych u-v-ścieżek $P_1, \ldots, P_k$. Rozważmy ścieżki $P'_1, \ldots, P'_k$ w grafie H', które powstały odpowiednio z podpodzielenia krawędzi w ścieżkach $P_1, \ldots, P_k$. Inaczej mówiąc, jeśli $P_i = u, x_1, x_2, \ldots, x_t, v$, to P'_i jest konkatenacją ścieżek $\phi(ux_1), \phi(x_1x_2), \ldots, \phi(x_tv)$.

Oczywiście dla każdego i, ścieżka P'_i jest u-v-ścieżką w G. Co więcej, ponieważ ścieżki P_i są wzajemnie wewnętrznie rozłączne oraz dla dowolnych dwóch krawędzi $e, f \in E(H)$, ścieżki $\phi(e), \phi(f)$ są wewnętrznie rozłączne, otrzymujemy, że $P'_1, \ldots, P'_k$ są parami wewnętrznie rozłączne. Otrzymaliśmy zatem w G rodzinę k wewnętrznie rozłącznych u-v-ścieżek, sprzeczność ($*$). □

4. (10p.) Niech $n \geqslant 7$ będzie liczbą nieparzystą. Niech G będzie grafem otrzymanym z cyklu C_n przez dodanie jednej krawędzi między niesąsiadującymi wierzchołkami. Wyznacz $\chi'(\overline{G})$, gdzie przez $\overline{G}$ oznaczamy dopełnienie grafu G: $(V(G), \binom{V(G)}{2} \setminus E(G))$.

Rozwiązanie. Zauważmy, że $\Delta(\overline{G}) = n - 3$. Z twierdzenia Vizinga wiemy, że $\chi'(\overline{G}) \leqslant \Delta(\overline{G}) + 1 = n - 2$, jeśli więc pokażemy, że $\chi'(\overline{G}) \geqslant n - 2$, otrzymamy $\chi'(\overline{G}) = n - 2$.

Załóżmy przeciwnie, tzn. że $\chi'(\overline{G}) \leqslant n - 3$. Z zadania 4.1 z ćwiczeń wynika, że $|E(\overline{G})| \leqslant (n-3) \cdot \mu(\overline{G})$, gdzie $\mu(\overline{G})$ to liczność największego skojarzenia w $\overline{G}$. Zauważmy, że $\mu(\overline{G})$ nie może przekraczać $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor = \frac{n-1}{2}$, bo n jest nieparzyste. Otrzymujemy więc, że

$$|E(\overline{G})| \leqslant \frac{(n-3)(n-1)}{2} = \frac{n^2 - 4n + 3}{2}. \tag{1}$$

Z drugiej strony, zauważmy, że graf G ma dokładnie $n+1$ krawędzi. Żeby otrzymać liczbę krawędzi dopełnienia grafu odejmujemy od liczby krawędzi grafu pełnego o n wierzchołkach liczbę krawędzi grafu G. Oznacza to, że graf $\overline{G}$ ma dokładnie $\frac{n(n-1)}{2} - (n+1) = \frac{n^2-3n-2}{2}$ krawędzi. Podstawiając to do (1) otrzymujemy

$$\begin{aligned} \frac{n^2 - 3n - 2}{2} &\leqslant \frac{n^2 - 4n + 3}{2} \\ -3n - 2 &\leqslant -4n + 3 \\ n &\leqslant 5, \end{aligned}$$

co stoi w sprzeczności z założeniem, że $n \geqslant 7$. Skoro tak, $\chi'(G) \geqslant n - 2$, co kończy dowód. □

5. (10p.) Niech G będzie grafem, a u i v będą parą niesąsiadujących wierzchołków w G. Niech G_1 będzie otrzymany z G przez dodanie krawędzi uv. Niech G_2 będzie otrzymany z G przez ściągnięcie u i v do jednego wierzchołka x, czyli usuwamy z G wierzchołki u, v i dodajemy wierzchołek x, który sąsiaduje ze wszystkimi sąsiadami u i wszystkimi sąsiadami v. Pokaż, że $\chi(G) = \min(\chi(G_1), \chi(G_2))$.

Rozwiązanie. Idea tego zadania jest taka, że kolorowania G_1 odpowiadają kolorowaniom G, gdzie u i v dostają różne kolory, a kolorowania G_2 odpowiadają kolorowaniom G, gdzie u i v dostają ten sam kolor – a któraś z tych dwóch możliwości musi zawsze wystąpić. Przekształćmy tę ideę w dowód.

Najpierw pokażmy, że $\chi(G) \leqslant \min(\chi(G_1), \chi(G_2))$. Zauważmy, że G jest podgrafem G_1, więc oczywiście każde poprawne kolorowanie G_1 jest też poprawnym kolorowaniem G. Z tego wynika, że $\chi(G) \leqslant \chi(G_1)$.

Teraz niech f będzie poprawnym kolorowaniem grafu G_2 na $\chi(G_2)$ kolorów. Zdefiniujmy kolorowanie f' grafu G w następujący sposób:

$$f'(w) = \begin{cases} f(x) & \text{jeśli } w \in \{u, v\}, \\ f(w) & \text{w przeciwnym przypadku} . \end{cases}$$

Zauważmy, że f' jest poprawnym kolorowaniem G: wierzchołki u i v nie są połączone krawędzią, więc mogą dostać ten sam kolor, a każdy sąsiad u lub v w G jest sąsiadem x w G_2. Zatem $\chi(G) \leqslant \chi(G_2)$. Podsumowując uzyskane nierówności, dostajemy, że $\chi(G) \leqslant \min(\chi(G_1), \chi(G_2))$.

Teraz pokażmy, że $\chi(G) \geqslant \min(\chi(G_1), \chi(G_2))$, czyli że co najmniej jeden z grafów G_1, G_2 można poprawnie pokolorować na $\chi(G)$ kolorów. Niech f będzie poprawnym kolorowaniem G na $\chi(G)$ kolorów. Rozważmy dwa przypadki:

Przypadek 1. $f(u) \neq f(v)$**.** Zauważmy, że wtedy f jest też poprawnym kolorowaniem G_1, zatem $\chi(G_1) \leqslant \chi(G)$.

Przypadek 2. $f(u) = f(v)$**.** Zdefiniujmy kolorowanie f' grafu G_2 w następujący sposób:

$$f'(w) = \begin{cases} f(w) & \text{jeśli } w \neq x, \\ f(u) = f(v) & \text{jeśli } w = x. \end{cases}$$

Znowu zauważmy, że f' jest poprawnym kolorowaniem G_2: kolory na wierzchołkach z $V(G_2) \setminus \{x\}$ są takie same jak w f, zaś każdy sąsiad x w G_2 sąsiaduje w G z u lub v, więc z pewnością nie ma koloru $f'(x) = f(u) = f(v)$.

Zatem w drugiej części dowodu pokazaliśmy, że $\chi(G) \geqslant \min(\chi(G_1), \chi(G_2))$, co razem w nierównością z pierwszej części dowodu daje nam tezę. $\square$

Definicje, twierdzenia, wzory.

G jest grafem o zbiorze wierzchołków V i zbiorze krawędzi E. Oznaczamy $n := |V|$ i $m := |E|$. Dla $X \subseteq V$ przez $G[X]$ oznaczamy podgraf G indukowany przez zbiór X, czyli $(X, \{e \in E \mid e \subseteq X\})$.

Spójność.

Def. Graf jest **spójny**, jeśli dla dowolnych dwóch wierzchołków u, v istnieje u-v-ścieżka. Graf jest **k-spójny**, jeśli $|G| > k$ i dla każdego $V' \subseteq V$, $|V'| < k$ graf $G - V'$ jest spójny. Graf jest **k-spójny krawędziowo**, jeśli $|E| > 0$ i dla każdego $X \subseteq E$, $|X| < k$ graf $G - X$ jest spójny.
Def. Spójność wierzchołkowa, ozn. $\kappa(G)$ – największe k, dla którego graf jest k-spójny.
Def. Spójność krawędziowa, ozn. $\kappa'(G)$ – największe k, dla którego graf jest krawędziowo k-spójny.
Nierówność Whitneya. $\kappa(G) \leqslant \kappa'(G) \leqslant \delta(G)$.
Tw. Mengera 1. Dla dowolnych $A, B \subseteq V$, niech k będzie rozmiarem najmniejszego A-B-separatora. W G istnieje k rozłącznych $A - B$ ścieżek.
Tw. Mengera 2. Graf G jest k-spójny wtw. gdy dla każdej pary wierzchołków u, v istnieje k wewnętrznie rozłącznych u-v ścieżek.
Tw. Mengera 3. Graf G jest k-spójny wtw. gdy dla każdego $x \in V$ i $U \in V \setminus \{x\}$, $|U| = k$, istnieje x-U-wachlarz, czyli k wew. rozłącznych ścieżek o początku w x i końcach w różnych wierzchołkach z U.
Tw. Mengera 4. Graf G jest k-spójny krawędziowo wtw. gdy dla każdej pary wierzchołków u, v istnieje k krawędziowo rozłącznych u-v ścieżek.

Obwód Eulera.

Tw. Eulera (wersja z obwodem). Multigraf spójny ma obwód Eulera wtw. gdy każdy wierzchołek ma stopień parzysty.
Tw. Eulera (wersja z drogą). Multigraf spójny ma drogę Eulera wtw. gdy liczba wierzchołków stopnia nieparzystego jest mniejsza lub równa 2.

Cykl Hamiltona.

Warunek konieczny. Jeśli G ma cykl Hamiltona, to dla każdego $S \subseteq V$, $S \neq \emptyset$ graf $G - S$ ma co najwyżej $|S|$ spójnych składowych.
Tw. Diraca (warunek dostateczny). Jeśli G jest prosty i $n \geqslant 3$ oraz dla każdego $v \in V$ zachodzi $\deg(v) \geqslant \frac{n}{2}$, to G jest hamiltonowski.
Tw. Orego (warunek dostateczny). Jeśli G jest prosty i $n \geqslant 3$ oraz dla każdych u, v takich, że $uv \notin E$, zachodzi $\deg(u) + \deg(v) \geqslant n$, to G jest hamiltonowski.

Kolorowanie krawędzi.

Tw. Vizinga. $\Delta(G) \leqslant \chi'(G) \leqslant \Delta(G) + 1$.

Kolorowanie wierzchołków.

Def. Zbiór niezależny – zbiór wierzchołków takich, że żadne dwa nie są połączone krawędzią.
Def. Graf G jest **krytyczny**, jeśli dla każdego jego właściwiego podgrafu H zachodzi $\chi(H) < \chi(G)$. Graf jest **k-krytyczny**, jeśli jest krytyczny i $\chi(G) = k$.
Lemat. Jeśli G jest k-krytyczny, to $\delta(G) \geqslant k - 1$.
Tw. $\chi(G) \leqslant \Delta(G) + 1$ (algorytm zachłanny).
Tw. Brooksa Jeśli graf spójny G nie jest nieparzystym cyklem ani grafem pełnym, to $\chi(G) \leqslant \Delta(G)$.
Tw Mycielskiego. Dla każdego k istnieje graf G_k bez trójkątów taki, że $\chi(G_k) = k$.
Def. Talią grafu nazywamy długość najkrótszego cyklu w tym grafie.
Tw. Erdősa Dla dowolnych $k, \ell \in \mathbb{N}$ istnieje graf G taki, że $\chi(G) \geqslant k$ i talia grafu G jest co najmniej ℓ.

Skojarzenia.

Def. Skojarzeniem nazywamy zbiór rozłącznych krawędzi grafu. Skojarzeniem **maksymalnym** nazywamy skojarzenie, które nie jest podzbiorem żadnego innego skojarzenia. Skojarzeniem **doskonałym** nazywamy skojarzenie, które pokrywa każdy wierzchołek.
Def. Ścieżką naprzemienną względem skojarzenia M nazywamy ścieżkę, której krawędzie na przemian należą i nie należą do M. Ścieżka jest **powiększająca** względem skojarzenia M, jeśli jest naprzemienna względem M oraz zaczyna i kończy się w wierzchołku niepokrytym przez M.
Tw. Berge'a. Skojarzenie M jest największe wtw, gdy nie ma ścieżki powiększającej względem M.
Tw. Halla. Niech G będzie grafem dwudzielnym o klasach dwudzielności X, Y. W G istnieje skojarzenie pokrywające X wtw, gdy dla każdego $X' \subseteq X$ zachodzi $|N(X')| \geqslant |X'|$.

Sieci i przepływy.

Niech $N = (G, c, s, t)$ będzie siecią, $G = (V, A)$. Dla funkcji $f : A \to \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ definiujemy:

- Dla $v \in V$: $f^+(v) := \sum_{u: vu \in A} f(vu)$ i $f^-(v) := \sum_{u: uv \in A} f(uv)$
- Dla $S \subseteq V$: $f^+(S) := \sum_{\substack{uv \in A \\ u \in S \\ v \notin S}} f(uv)$ i $f^-(S) := \sum_{\substack{vu \in A \\ u \in S \\ v \notin S}} f(vu)$

Def. Funkcję $f : A \to \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ nazywamy **przepływem**, jeśli dla każdego $a \in A$ zachodzi $f(a) \leqslant c(a)$ oraz dla każdego $v \in V \setminus \{s, t\}$ zachodzi $f^+(v) = f^-(v)$.
Def. Wartość przepływu f to $\operatorname{val} f := f^+(s) - f^-(s)$.
Fakt. $f^+(s) - f^-(s) = f^-(t) - f^+(t)$.
Def. Dla dowolnego $S \subseteq V$ takiego, że $s \in S$ i $t \in \overline{S} := V \setminus S$, **przekrojem** $(S, \overline{S})$ nazywamy zbiór krawędzi o początku w S i końcu w $\overline{S}$. **Przepustowością** przekroju $K = (S, \overline{S})$ nazywamy $\operatorname{cap} K := \sum_{a \in K} c(a)$.
Lemat. Dla dowolnego przepływu f i dowolnego przekroju $(S, \overline{S})$ zachodzi $\operatorname{val} f = f^+(S) - f^-(S)$.
Tw. Dla dowolnego przepływu f i dowolnego przekroju K zachodzi $\operatorname{val} f \leqslant \operatorname{cap} K$. Jeśli $\operatorname{val} f = \operatorname{cap} K$, to f jest największym przepływem, a K najmniejszym przekrojem.
Def. Dla ścieżki P (niekoniecznie skierowanej), przepływu f i łuku a z P definujemy:

$$r(a) = \begin{cases} c(a) - f(a) & \text{jeśli } a \text{ jest krawędzią w przód,} \\ f(a) & \text{jeśli } a \text{ jest krawędzią w tył.} \end{cases}$$

Dla ścieżki P definiujemy $r(P) := \min_{a \text{ - łuk } P} r(a)$.

Ścieżka P jest **powiększająca** jeśli jest s-t ścieżką i $r(P) > 0$. Wówczas można zdefiniować przepływ $\hat{f}(a)$ jako:

$$\hat{f}(a) = \begin{cases} f(a) + r(P), & \text{jeśli } a \in A(P) \text{ jest łukiem w przód,} \\ f(a) - r(P), & \text{jeśli } a \in A(P) \text{ jest łukiem w tył} \\ f(a), & \text{jeśli } a \notin A(P). \end{cases}$$

Tw. Forda-Fulkersona. Przepływ f jest największy wtw. gdy nie ma ścieżki powiększającej.
Wniosek Jeśli f^* jest największym przepływem, a $\widetilde{K}$ najmniejszym przekrojem, to $\operatorname{cap} \widetilde{K} = \operatorname{val} f^*$.

Planarność.

Tw. Kuratowskiego. Graf G jest planarny wtw. gdy nie zawiera podpodziału $K_{3,3}$ lub K_5.
Tw. Dla grafu płaskiego G zachodzi $\sum_{f \in F(G)} \deg_G f = 2m$, gdzie przez $F(G)$ oznaczamy zbiór regionów (ścian) grafu płaskiego G.
Formuła Eulera. Dla spójnego grafu płaskiego G zachodzi $n - m + |F(G)| = 2$.
Lemat. Dla prostego grafu planarnego G o $n \geqslant 3$ wierzchołkach i talii k zachodzi $m \leqslant k(n-2)/(k-2)$.
Wniosek. Dla prostego grafu planarnego G o $n \geqslant 3$ wierzchołkach zachodzi $m \leqslant 3n - 6$.
Wniosek. Każdy graf planarny ma wierzchołek stopnia co najwyżej 5.
Tw. o czterech kolorach. Jeśli G jest planarny, to $\chi(G) \leqslant 4$.
Def. Dla grafu płaskiego G, jego **grafem dualnym** G^* nazywamy graf, którego wierzchołkami są regiony G i istnieje bijekcja między $E(G^*)$ a $E(G)$: krawędź e^* łączy dwa wierzchołki f_1, f_2 w G^* wtw, gdy odpowiadająca jej krawędź e z G jest incydentna z f_1 i f_2.

Teoria Ramseya.

Def. Liczba Ramseya, ozn. $R(t)$, to najmniejsze n takie, że przy dowolnym dwukolorowaniu krawędzi K_n znajdziemy jednokolorową kopię K_t.
Przez $R(s, t)$ oznaczamy najmniejsze n takie, że przy dowolnym kolorowaniu K_n na czerwono i niebiesko znajdziemy czerwoną kopię K_s lub niebieską K_t.
Tw. Ramseya (Erdősa-Szekeresa). Dla każdego t zachodzi $R(t) \leqslant 4^t$.
Tw. Erdősa. Dla $t \geqslant 3$ zachodzi $R(t) > 2^{t/2}$.
Tw. Dla $s, t > 1$ zachodzi $R(s, t) \leqslant R(s, t-1) + R(s-1, t)$.
Wniosek. Dla $s, t \geqslant 1$ zachodzi $R(s, t) \leqslant \binom{s+t-2}{s-1} = \binom{s+t-2}{t-1}$.