**1.** (10p.) Niech $G$ będzie grafem o $n \geqslant 3$ wierzchołkach i co najmniej $\binom{n-1}{2} + 2$ krawędziach. Pokaż, że $G$ jest hamiltonowski.

*Rozwiązanie.* Jeśli $G$ jest pełny, to oczywiście jest hamiltonowski. Przypuśćmy zatem, że nie jest. Wybierzmy dowolne niesąsiadujące wierzchołki $u$ i $v$. Wtedy

$$|E(G)| = \deg u + \deg v + |E(G - \{u, v\})|.$$

Graf $G - \{u, v\}$ ma $n - 2$ wierzchołki, czyli co najwyżej $\binom{n-2}{2}$ krawędzi. Otrzymujemy zatem

$$\deg u + \deg v \geqslant |E(G)| - |E(G - \{u, v\})| \geqslant \binom{n-1}{2} + 2 - \binom{n-2}{2} = n.$$

Zatem z twierdzenia Orego wnioskujemy, że $G$ jest hamiltonowski. $\square$

**2.** (10p.) Pokaż, że dla każdego $t$ istnieje $n$ takie, że dla każdego grafu $G$ zachodzi: jeśli w $G^2$ istnieje klika rozmiaru $n$, to w $G$ istnieje klika rozmiaru $t$ lub zbiór niezależny liczności $t$, w którym każde dwa wierzchołki mają wspólnego sąsiada.

Przypomnijmy, że graf $G^2$ ma zbiór wierzchołków $V(G)$, a zbiór krawędzi $E(G) \cup \{xy \mid \exists z : xz, yz \in E(G)\}$.

*Rozwiązanie.* Weźmy $n = R(t)$. Niech $X$ będzie zbiorem wierzchołków tworzących klikę rozmiaru $n$ w $G^2$. Skoro dowolne dwa wierzchołki $u, v \in X$ sąsiadują w grafie $G^2$, w grafie $G$ muszą one sąsiadować lub mieć wspólnego sąsiada. Pokolorujmy krawędzie z $G^2[X]$ na dwa kolory w taki sposób, że:

1. jeśli $uv \in E(G)$, to kolorujemy $uv$ kolorem różowym,
2. pozostałe krawędzie kolorujemy kolorem turkusowym.

Ponieważ $X$ ma $R(t)$ wierzchołków, to w jednym z kolorów istnieje klika rozmiaru $t$ – oznaczmy zbiór jej wierzchołków przez $X'$. Jeśli jest to klika w kolorze różowym, to każde dwa wierzchołki z $X'$ są połączone krawędzią w $G$, czyli $X'$ indukuje klikę rozmiaru $t$ w $G$. Jeśli jest to klika w kolorze turkusowym, to każda para wierzchołków $u, v \in X'$ nie sąsiaduje w $G$, ale jednocześnie tworzy krawędź w $G^2$. Zatem każda para wierzchołków z $X'$ ma wspólnego sąsiada w $G$, co kończy dowód. $\square$

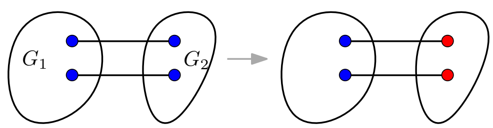
**3.** (10p.) Niech $G$ będzie grafem 4-krytycznym. Pokaż, że jest 3-krawędziowo-spójny.

*Rozwiązanie.* Załóżmy przeciwnie, tzn. że $G$ nie jest 3-krawędziowo-spójny. Oznacza to, że istnieje zbiór $S$ co najwyżej dwóch krawędzi, taki że $G - S$ nie jest spójny. Wiemy z ćwiczeń, że każdy graf krytyczny jest bispójny, czyli dwuspójny lub izomorficzny z $K_2$. Graf $K_2$ nie jest 4-krytyczny, więc $G$ musi być dwuspójny. Oznacza to w szczególności, że $S$ składa się z dokładnie dwóch krawędzi $e$ i $f$, w przeciwnym razie $G$ nie jest spójny lub ma most, a więc i wierzchołek rozcinający. Wynika z tego również, że $G - S$ składa się z dwóch spójnych składowych $G_1$ i $G_2$.

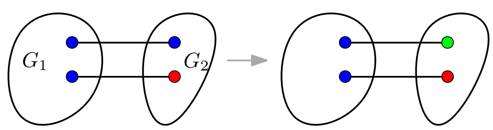
Niech $e = ab$, $f = cd$, gdzie $a, c \in V(G_1)$ oraz $b, d \in V(G_2)$; zauważmy, że $a \neq c$ i $b \neq d$, bo $G$ nie ma wierzchołków rozcinających. Skoro $G$ jest 4-krytyczny, istnieją poprawne 3-kolorowania grafów $G_1$ i $G_2$, nazwijmy je odpowiednio $c_1$ i $c_2$. Zauważmy, że $c_1(a) = c_2(b)$ lub $c_1(c) = c_2(d)$, w przeciwnym razie $g : V(G) \to [3]$ zdefiniowane jako $g(x) = c_i(x)$ dla $x \in V(G_i)$, gdzie $i \in \{1, 2\}$, byłoby poprawnym 3-kolorowaniem $G$, sprzeczność z 4-krytycznością.

Przez symetrię możemy zatem założyć, że $c_1(a) = c_2(b) = 1$ oraz $c_1(c) \leqslant c_2(d)$. Ustalmy kolory wierzchołków zgodnie z kolorowaniami $c_1, c_2$. Dokonamy permutacji kolorów na wierzchołkach $V(G_2)$ w taki sposób, aby otrzymać poprawne kolorowanie. Rozważmy cztery przypadki.

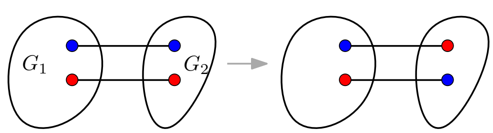
**Przypadek 1.** $\boldsymbol{c_1(c) = 1}$ **i** $\boldsymbol{c_2(d) = 1}$**.** Dokonujemy permutacji kolorów na wierzchołkach $V(G_2)$: kolor 1 zamieniamy z kolorem 2.



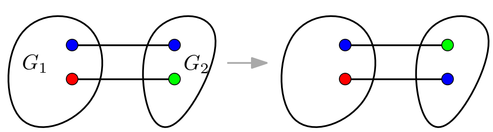

**Przypadek 2.** $\boldsymbol{c_1(c) = 1}$ **i** $\boldsymbol{c_2(d) \neq 1}$**.** Bez straty ogólności niech $c_2(d) = 2$. Dokonujemy permutacji kolorów na wierzchołkach $V(G_2)$: kolor 1 zamieniamy z kolorem 3.




**Przypadek 3.** $\boldsymbol{c_1(c) = c_2(d) \neq 1}$**.** Bez straty ogólności niech $c_1(c) = c_2(d) = 2$. Dokonujemy permutacji kolorów na wierzchołkach $V(G_2)$: kolor 1 zamieniamy z kolorem 2.




**Przypadek 4.** $\boldsymbol{c_1(c) = 2}$ **i** $\boldsymbol{c_2(d) = 3}$**.** Dokonujemy permutacji kolorów na wierzchołkach $V(G_2)$: kolor 1 zamieniamy z kolorem 3.




Nazwijmy otrzymane kolorowanie $g$, oczywiście jest to 3-kolorowanie. We wszystkich przypadkach można zauważyć, że $g$ jest poprawne. Istotnie, dwa sąsiadujące wierzchołki z tej samej składowej $G - S$ nadal dostają dwa różne kolory (bo tylko dokonywaliśmy permutacji kolorów wewnątrz $G_2$), a dodatkowo zadbaliśmy, aby $g(a) \neq g(b)$ oraz $g(c) \neq g(d)$. Dostajemy sprzeczność z 4-krytycznością $G$, a więc $G$ musi być 3-krawędziowo-spójny. $\square$

**4.** (10p.) Dla liczb $n \geqslant k \geqslant 1$, przez $G(n,k)$ oznaczmy graf, którego wierzchołkami są ciągi binarne długości $n$, a krawędź łączy ciągi, które różnią się na dokładnie $k$ pozycjach. Wyznacz $\chi'(G(n,k))$.

*Rozwiązanie.* Zauważmy, że $k$ pozycji spośród $n$ można wybrać na $\binom{n}{k}$ sposobów, zatem każdy wierzchołek ma dokładnie tylu sąsiadów. Wynika z tego, że $\chi'(G(n,k)) \geqslant \binom{n}{k}$. Pokażemy teraz, że $\chi'(G(n,k)) \leqslant \binom{n}{k}$, definiując poprawne kolorowanie krawędziowe na $\binom{n}{k}$ kolorów. Zbiorem kolorów będzie $\binom{[n]}{k}$, czyli rodzina $k$-elementowych podzbiorów $[n]$. Krawędź $xy$ kolorujemy kolorem $A \in \binom{[n]}{k}$ wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór indeksów, na których różni się ciąg $x$ od ciągu $y$ jest równy $A$. Z definicji grafu, każda krawędź dostaje dokładnie jeden kolor.

Zauważmy też, że każdy wierzchołek jest incydentny z dokładnie jedna krawędzią w danym kolorze: dla każdego $x \in \{0,1\}^n$ i każdego $A \in \binom{[n]}{k}$ istnieje jeden ciąg binarny, który różni się of $x$ dokładnie na pozycjach wskazanych przez $A$. Zatem zdefiniowane kolorowanie jest poprawne.

Podsumowując, otrzymujemy $\chi'(G(n,k)) = \binom{n}{k}$. $\square$

**5.** (10p.) Niech $G$ będzie grafem dwudzielnym, który ma skojarzenie doskonałe. Pokaż, że istnieje wierzchołek taki, że każda krawędź z nim incydentna należy do pewnego skojarzenia doskonałego.

*Rozwiązanie.* Oznaczmy przez $X$ i $Y$ klasy dwudzielności $G$. Wiemy, że w $G$ istnieje skojarzenie doskonałe $M$, dla każdego $x \in X$ oznaczmy więc przez $m(x)$ wierzchołek z $Y$ taki że $xm(x) \in M$.

Załóżmy, że teza nie zachodzi – w szczególności dla każdego wierzchołka $y \in Y$ istnieje jego sąsiad $f(y) \in X$ taki, że krawędź $yf(y)$ nie należy do żadnego skojarzenia doskonałego (być może jest takich więcej, ale wybieramy jednego). Niech $F = \{yf(y) : y \in Y\}$.

Ustalmy wierzchołek $p_1 \in X$ i niech $P = (p_1, p_2, \ldots, p_d)$, dla pewnego $d \in \mathbb{N}^+$, będzie maksymalną ścieżką, która zaczyna się w $p_1$ i używa naprzemiennie krawędzi z $M$ i $F$. Zauważmy, że dla nieparzystych $i \in [d-1]$ mamy $p_i \in X$ oraz $p_ip_{i+1} \in M$, a dla parzystych $p_i \in Y$ oraz $p_ip_{i+1} \in F$.

Zauważmy, że $p_{d-1} \in X$. W przeciwnym wypadku $p_d \in X$, a ponieważ $P$ jest maksymalną ścieżką, istnieje $i \in [d-2]$ takie, że $m(p_d) = p_i \in Y$. Z definicji $P$, $p_{i-1}p_i = p_{i-1}m(p_d) \in M$, a skoro $M$ jest skojarzeniem, to $p_{i-1} = p_{d-1}$, sprzeczność, bo wierzchołki na ścieżce się nie powtarzają.

W takim razie $p_{d-1} \in X$ i $p_d \in Y$. Skoro $P$ jest maksymalną ścieżką, istnieje $i \in [d-2]$ takie że $f(p_d) = p_i \in X$. Zauważmy, że $(p_i, p_{i+1}, \ldots, p_d, p_i)$ jest cyklem w grafie $G$, nazwijmy go $C$. Krawędzie $C$ należą naprzemiennie do $M$ i $F$. Skoro $G$ jest dwudzielny, to $C$ jest parzysty, więc każdy wierzchołek $C$ jest incydentny w $C$ do dokładnie jednej krawędzi z $M$ i dokładnie jednej krawędzi z $F$. To znaczy, że krawędzie $F \cap E(C)$ są skojarzeniem doskonałym w $G[V(C)]$. Z drugiej strony, $M \setminus E(C)$ jest skojarzeniem doskonałym w $G - V(C)$. Ponieważ każdy wierzchołek $v \in V(G)$ należy do $G[V(C)]$ lub $G - V(C)$, zbiór $M \div E(C)$, czyli $(M \setminus E(C)) \cup (F \cap E(C))$ jest skojarzeniem doskonałym w $G$, który zawiera krawędź z $F$ – sprzeczność z definicją zbioru $F$. $\square$

# Definicje, twierdzenia, wzory.

$G$ jest grafem o zbiorze wierzchołków $V$ i zbiorze krawędzi $E$. Oznaczamy $n := |V|$ i $m := |E|$. Dla $X \subseteq V$ przez $G[X]$ oznaczamy podgraf $G$ indukowany przez zbiór $X$, czyli $(X, \{e \in E \mid e \subseteq X\})$.

## Spójność.

**Def.** Graf jest **spójny**, jeśli dla dowolnych dwóch wierzchołków $u, v$ istnieje $u$-$v$-ścieżka. Graf jest **$k$-spójny**, jeśli $|G| > k$ i dla każdego $V' \subseteq V$, $|V'| < k$ graf $G - V'$ jest spójny. Graf jest **$k$-spójny krawędziowo**, jeśli $|E| > 0$ i dla każdego $X \subseteq E$, $|X| < k$ graf $G - X$ jest spójny.
**Def. Spójność wierzchołkowa**, ozn. $\kappa(G)$ – największe $k$, dla którego graf jest $k$-spójny.
**Def. Spójność krawędziowa**, ozn. $\kappa'(G)$ – największe $k$, dla którego graf jest krawędziowo $k$-spójny.
**Nierówność Whitneya.** $\kappa(G) \leqslant \kappa'(G) \leqslant \delta(G)$.
**Tw. Mengera 1.** Dla dowolnych $A, B \subseteq V$, niech $k$ będzie rozmiarem najmniejszego $A$-$B$-separatora. W $G$ istnieje $k$ rozłącznych $A - B$ ścieżek.
**Tw. Mengera 2.** Graf $G$ jest $k$-spójny wtw. gdy dla każdej pary wierzchołków $u$, $v$ istnieje $k$ wewnętrznie rozłącznych $u$-$v$ ścieżek.
**Tw. Mengera 3.** Graf $G$ jest $k$-spójny wtw. gdy dla każdego $x \in V$ i $U \in V \setminus \{x\}$, $|U| = k$, istnieje $x$-$U$-wachlarz, czyli $k$ wew. rozłącznych ścieżek o początku w $x$ i końcach w różnych wierzchołkach z $U$.
**Tw. Mengera 4.** Graf $G$ jest $k$-spójny krawędziowo wtw. gdy dla każdej pary wierzchołków $u$, $v$ istnieje $k$ krawędziowo rozłącznych $u$-$v$ ścieżek.

## Obwód Eulera.

**Tw. Eulera (wersja z obwodem).** Multigraf spójny ma obwód Eulera wtw. gdy każdy wierzchołek ma stopień parzysty.
**Tw. Eulera (wersja z drogą).** Multigraf spójny ma drogę Eulera wtw. gdy liczba wierzchołków stopnia nieparzystego jest mniejsza lub równa 2.

## Cykl Hamiltona.

**Warunek konieczny.** Jeśli $G$ ma cykl Hamiltona, to dla każdego $S \subseteq V$, $S \neq \emptyset$ graf $G - S$ ma co najwyżej $|S|$ spójnych składowych.
**Tw. Diraca (warunek dostateczny).** Jeśli $G$ jest prosty i $n \geqslant 3$ oraz dla każdego $v \in V$ zachodzi $\deg(v) \geqslant \frac{n}{2}$, to $G$ jest hamiltonowski.
**Tw. Orego (warunek dostateczny).** Jeśli $G$ jest prosty i $n \geqslant 3$ oraz dla każdych $u, v$ takich, że $uv \notin E$, zachodzi $\deg(u) + \deg(v) \geqslant n$, to $G$ jest hamiltonowski.

## Kolorowanie krawędzi.

**Tw. Vizinga.** $\Delta(G) \leqslant \chi'(G) \leqslant \Delta(G) + 1$.

## Kolorowanie wierzchołków.

**Def. Zbiór niezależny** – zbiór wierzchołków takich, że żadne dwa nie są połączone krawędzią.
**Def.** Graf $G$ jest **krytyczny**, jeśli dla każdego jego właściwiego podgrafu $H$ zachodzi $\chi(H) < \chi(G)$. Graf jest **$k$-krytyczny**, jeśli jest krytyczny i $\chi(G) = k$.
**Lemat.** Jeśli $G$ jest $k$-krytyczny, to $\delta(G) \geqslant k - 1$.
**Tw.** $\chi(G) \leqslant \Delta(G) + 1$ (algorytm zachłanny).
**Tw. Brooksa** Jeśli graf spójny $G$ nie jest nieparzystym cyklem ani grafem pełnym, to $\chi(G) \leqslant \Delta(G)$.
**Tw Mycielskiego.** Dla każdego $k$ istnieje graf $G_k$ bez trójkątów taki, że $\chi(G_k) = k$.
**Def. Talią** grafu nazywamy długość najkrótszego cyklu w tym grafie.
**Tw. Erdősa** Dla dowolnych $k, \ell \in \mathbb{N}$ istnieje graf $G$ taki, że $\chi(G) \geqslant k$ i talia grafu $G$ jest co najmniej $\ell$.

## Skojarzenia.

**Def. Skojarzeniem** nazywamy zbiór rozłącznych krawędzi grafu. Skojarzeniem **maksymalnym** nazywamy skojarzenie, które nie jest podzbiorem żadnego innego skojarzenia. Skojarzeniem **doskonałym** nazywamy skojarzenie, które pokrywa każdy wierzchołek.
**Def. Ścieżką naprzemienną** względem skojarzenia $M$ nazywamy ścieżkę, której krawędzie na przemian należą i nie należą do $M$. Ścieżka jest **powiększająca** względem skojarzenia $M$, jeśli jest naprzemienna względem $M$ oraz zaczyna i kończy się w wierzchołku niepokrytym przez $M$.
**Tw. Berge'a.** Skojarzenie $M$ jest największe wtw, gdy nie ma ścieżki powiększającej względem $M$.
**Tw. Halla.** Niech $G$ będzie grafem dwudzielnym o klasach dwudzielności $X, Y$. W $G$ istnieje skojarzenie pokrywające $X$ wtw, gdy dla każdego $X' \subseteq X$ zachodzi $|N(X')| \geqslant |X'|$.

## Sieci i przepływy.

Niech $N = (G, c, s, t)$ będzie siecią, $G = (V, A)$. Dla funkcji $f : A \to \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ definiujemy:

- Dla $v \in V$: $f^+(v) := \sum_{u: vu \in A} f(vu)$ i $f^-(v) := \sum_{u: uv \in A} f(uv)$
- Dla $S \subseteq V$: $f^+(S) := \sum_{\substack{uv \in A \\ u \in S \\ v \notin S}} f(uv)$ i $f^-(S) := \sum_{\substack{vu \in A \\ u \in S \\ v \notin S}} f(vu)$

**Def.** Funkcję $f : A \to \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ nazywamy **przepływem**, jeśli dla każdego $a \in A$ zachodzi $f(a) \leqslant c(a)$ oraz dla każdego $v \in V \setminus \{s, t\}$ zachodzi $f^+(v) = f^-(v)$.
**Def. Wartość przepływu** $f$ to $\operatorname{val} f := f^+(s) - f^-(s)$.
**Fakt.** $f^+(s) - f^-(s) = f^-(t) - f^+(t)$.
**Def.** Dla dowolnego $S \subseteq V$ takiego, że $s \in S$ i $t \in \overline{S} := V \setminus S$, **przekrojem** $(S, \overline{S})$ nazywamy zbiór krawędzi o początku w $S$ i końcu w $\overline{S}$. **Przepustowością** przekroju $K = (S, \overline{S})$ nazywamy $\operatorname{cap} K := \sum_{a \in K} c(a)$.
**Lemat.** Dla dowolnego przepływu $f$ i dowolnego przekroju $(S, \overline{S})$ zachodzi $\operatorname{val} f = f^+(S) - f^-(S)$.
**Tw.** Dla dowolnego przepływu $f$ i dowolnego przekroju $K$ zachodzi $\operatorname{val} f \leqslant \operatorname{cap} K$. Jeśli $\operatorname{val} f = \operatorname{cap} K$, to $f$ jest największym przepływem, a $K$ najmniejszym przekrojem.
**Def.** Dla ścieżki $P$ (niekoniecznie skierowanej), przepływu $f$ i łuku $a$ z $P$ definujemy:

$$r(a) = \begin{cases} c(a) - f(a) & \text{jeśli } a \text{ jest krawędzią w przód,} \\ f(a) & \text{jeśli } a \text{ jest krawędzią w tył.} \end{cases}$$

Dla ścieżki $P$ definiujemy $r(P) := \min_{a \text{ - łuk } P} r(a)$.

Ścieżka $P$ jest **powiększająca** jeśli jest $s$-$t$ ścieżką i $r(P) > 0$. Wówczas można zdefiniować przepływ $\hat{f}(a)$ jako:

$$\hat{f}(a) = \begin{cases} f(a) + r(P), & \text{jeśli } a \in A(P) \text{ jest łukiem w przód,} \\ f(a) - r(P), & \text{jeśli } a \in A(P) \text{ jest łukiem w tył} \\ f(a), & \text{jeśli } a \notin A(P). \end{cases}$$

**Tw. Forda-Fulkersona.** Przepływ $f$ jest największy wtw. gdy nie ma ścieżki powiększającej.
**Wniosek** Jeśli $f^*$ jest największym przepływem, a $\widetilde{K}$ najmniejszym przekrojem, to $\operatorname{cap} \widetilde{K} = \operatorname{val} f^*$.

## Planarność.

**Tw. Kuratowskiego.** Graf $G$ jest planarny wtw. gdy nie zawiera podpodziału $K_{3,3}$ lub $K_5$.
**Tw.** Dla grafu płaskiego $G$ zachodzi $\sum_{f \in F(G)} \deg_G f = 2m$, gdzie przez $F(G)$ oznaczamy zbiór regionów (ścian) grafu płaskiego $G$.
**Formuła Eulera.** Dla spójnego grafu płaskiego $G$ zachodzi $n - m + |F(G)| = 2$.
**Lemat.** Dla prostego grafu planarnego $G$ o $n \geqslant 3$ wierzchołkach i talii $k$ zachodzi $m \leqslant k(n-2)/(k-2)$.
**Wniosek.** Dla prostego grafu planarnego $G$ o $n \geqslant 3$ wierzchołkach zachodzi $m \leqslant 3n - 6$.
**Wniosek.** Każdy graf planarny ma wierzchołek stopnia co najwyżej 5.
**Tw. o czterech kolorach.** Jeśli $G$ jest planarny, to $\chi(G) \leqslant 4$.
**Def.** Dla grafu płaskiego $G$, jego **grafem dualnym** $G^*$ nazywamy graf, którego wierzchołkami są regiony $G$ i istnieje bijekcja między $E(G^*)$ a $E(G)$: krawędź $e^*$ łączy dwa wierzchołki $f_1, f_2$ w $G^*$ wtw, gdy odpowiadająca jej krawędź $e$ z $G$ jest incydentna z $f_1$ i $f_2$.

## Teoria Ramseya.

**Def. Liczba Ramseya**, ozn. $R(t)$, to najmniejsze $n$ takie, że przy dowolnym dwukolorowaniu krawędzi $K_n$ znajdziemy jednokolorową kopię $K_t$.
Przez $R(t_1, t_2, \ldots, t_k)$ oznaczamy najmniejsze $n$ takie, że przy dowolnym kolorowaniu $K_n$ na $k$ kolorów znajdziemy kopię $K_{t_1}$ w pierwszym kolorze, $K_{t_2}$ w drugim kolorze, ... lub $K_{t_k}$ w $k$-tym kolorze.
**Tw. Ramseya (Erdősa-Szekeresa).** Dla każdego $t$ zachodzi $R(t) \leqslant 4^t$.
**Tw. Erdősa**. Dla $t \geqslant 3$ zachodzi $R(t) > 2^{t/2}$.
**Tw.** Dla $s, t > 1$ zachodzi $R(s, t) \leqslant R(s, t-1) + R(s-1, t)$.
**Wniosek.** Dla $s, t \geqslant 1$ zachodzi $R(s, t) \leqslant \binom{s+t-2}{s-1} = \binom{s+t-2}{t-1}$.