

1. (10p.) Niech $G = (V, E)$ będzie grafem planarnym o n wierzchołkach. Pokaż, że istnieje zbiór $X \subseteq V$ rozmiaru co najwyżej $n/4$, taki że $G - X$ nie zawiera K_4 jako podgrafu.

Rozwiązanie. Z twierdzenia o czterech kolorach wiemy, że G ma poprawne kolorowanie f na cztery kolory. Niech i będzie kolorem, który w kolorowaniu f występuje najrzadziej i niech X będzie zbiorem wierzchołków w kolorze i . Oczywiście $|X| \leq n/4$. Graf $G - X$ jest poprawnie pokolorowany na trzy kolory, więc w szczególności nie zawiera K_4 . $\square$

2. (10p.) Niech $N = (G, c, s, t)$ będzie siecią, a f będzie największym przepływem w sieci N . Pokaż, że jeśli f jest największym przepływem także w sieci $\overleftarrow{N} = (G, c, t, s)$, to $\text{val}_N f = 0$.

Rozwiązanie 1. Załóżmy nie wprost, że $\text{val}_N f > 0$. Mamy wtedy

$$\text{val}_{\overleftarrow{N}} f = f^+(t) - f^-(t) = f^-(s) - f^+(s) = -(f^+(s) - f^-(s)) = -\text{val}_N f < 0.$$

Przepływ f nie może być zatem największy w $\overleftarrow{N}$, ponieważ przepływ zerowy (przyporządkowujący każdemu łukowi wartość 0) posiada większą wartość, sprzeczność. $\square$

Rozwiązanie 2. Zauważmy, że największy przepływ w dowolnej sieci musi mieć nieujemną wartość (ponieważ funkcja zerowa też jest poprawnym przepływem). Załóżmy nie wprost, że $\text{val}_N f > 0$. Zauważmy, że wtedy w grafie G istnieje skierowana s - t -ścieżka taka, że na każdym łuku tej ścieżki f przyjmuje dodatnią wartość. Istotnie, gdyby tak nie było, to przekrój $(S, \bar{S})$, gdzie S jest zbiorem wierzchołków osiągalnych z s , poruszając się tylko po łukach, na których f przyjmuje dodatnią wartość, byłby przekrojem o zerowej przepustowości w N , co implikowałoby $\text{val}_N f = 0$.

Oznaczmy wspomnianą s - t -ścieżkę jako P oraz niech najmniejsza wartość przepływu na łukach P wynosi k (z założenia, jest to liczba dodatnia). Rozpatrzmy tę ścieżkę jako nieskierowaną t - s -ścieżkę w $\overleftarrow{N}$ i obliczmy wartość $r(P)$. Ścieżka P zawiera wyłącznie łuki w tył, zatem

$$r(P) = \min_{a - \text{łuk } P} r(a) = \min_{a - \text{łuk } P} f(a) = k > 0,$$

czyli P jest ścieżką powiększającą w $\overleftarrow{N}$. Z twierdzenia Forda-Fulkersona, f nie może być największy w $\overleftarrow{N}$, sprzeczność. $\square$

3. (10p.) Niech $G = (V, E)$ będzie grafem spójnym o n wierzchołkach. Wykaż, że dla każdego $1 \leq k \leq n - 1$ istnieje zbiór $S \subseteq V$ taki, że $|S| = k$ oraz $G - S$ jest grafem spójnym.

Rozwiązanie 1. Pokażemy najpierw, że możemy znaleźć taki wierzchołek $v \in V$, że $G - v$ będzie spójny (*). Rozważmy drzewo rozpinające grafu G , ma ono co najmniej jeden liść. Niech v będzie dowolnym liściem tego drzewa rozpinającego. Łatwo można zauważyć, że wtedy $G - v$ będzie spójny (dla każdej pary wierzchołków z $V \setminus \{v\}$ możemy znaleźć ścieżkę, poruszając się po krawędziach tego drzewa).

Udowodnimy tezę zadania indukcyjnie. Dla $k = 1$ teza wynika z powyższego rozumowania. Niech teraz $k > 1$ i założmy, że teza jest prawdziwa dla $k - 1$. Istnieje wtedy zbiór $S' \subseteq V$ liczności $k - 1$ taki, że $G - S'$ jest spójny. Z (*) istnieje taki wierzchołek $v \in V \setminus S'$, że $(G - S') - v$ jest spójny. Ale także $(G - S') - v = G - (S' \cup \{v\})$. Biorąc zatem $S = S' \cup \{v\}$, kończymy dowód. $\square$

Rozwiązanie 2. Weźmy dowolny $v \in V$. Posortujmy pozostałe wierzchołki G malejąco względem odległości od v i niech zbiór S zawiera k pierwszych wierzchołków w ustalonym porządku. Pokażemy teraz, że istnieje ścieżka od v do dowolnego innego wierzchołka z $G - S$, co będzie implikować spójność $G - S$. Niech $u \in V \setminus S$, $u \neq v$ i założmy nie wprost, że nie istnieje v - u -ścieżka w $G - S$. Wiemy, że G jest spójny, zatem każda ścieżka, w szczególności najkrótsza, musi przechodzić przez pewien wierzchołek z S , oznaczmy ten wierzchołek przez w . Ale wtedy $d(v, u) \geq d(v, w) + 1$, zatem u byłby przed w w ustalonym porządku, więc u musiałby należeć do S , sprzeczność. $\square$

4 (10p.) Ustalmy $n, k > 1$, przy czym k niech będzie liczbą parzystą. Wierzchołkami grafu $G(n, k)$ są wszystkie ciągi o elementach ze zbioru $\{1, \dots, k\}$ i długości co najwyżej n (wliczając ciąg pusty długości 0). Dwa różne ciągi połączone są krawędzią, jeśli jeden ciąg jest prefiksem drugiego. Zbadaj czy $G(n, k)$ jest grafem eulerowskim oraz zbadaj czy jest on hamiltonowski.

Rozwiązanie. Niech v będzie dowolnym wierzchołkiem rozważanego grafu. Sąsiaduje on z wierzchołkami, których jest prefiksem oraz z wierzchołkami, które są jego prefiksami. Jeśli oznaczymy przez a długość ciągu v , to sąsiadów pierwszego typu ma on $\sum_{j=1}^{n-a} k^j$, gdyż żeby otrzymać ciąg, którego v jest prefiksem musimy dopisać do v ciąg długości od 1 do $n - a$, a ciąg długości j możemy dopisać na k^j sposobów. Ponieważ k jest parzyste, to v ma parzyście wiele sąsiadów pierwszego typu. Sąsiadów drugiego typu, czyli takich, które są prefiksami ciągu v jest a , gdyż tyle prefiksów różnych od samego siebie ma ciąg długości a . Stąd $\deg_{G(n,k)}(v) = \sum_{j=1}^{n-a} k^j + a$, co jest liczbą nieparzystą dla nieparzystych a . Oznacza to, że rozważany graf nie jest eulerowski.

Analizując dalej zauważamy, że dla dowolnego v , który nie jest ciągiem pustym każdy jego niepusty prefiks zaczyna się do tego samego wyrazu co v oraz każdy ciąg, którego prefiksem jest v zaczyna się od tej samej litery. Oznacza to - jeśli oznaczymy przez ε ciąg pusty, że $G(n, k) - \varepsilon$ ma co najmniej k składowych jako, że żadne dwa ciągi zaczynające się różnymi wyrazami nie są w tej samej składowej. Ponieważ $k > 1$ oznacza to, że $G(n, k)$ nie jest hamiltonowski.

5. (10p.) Niech $G = (V, E)$ będzie grafem. Pokaż, że $\chi'(G) + \chi'(\overline{G}) \leq 2|V| - 1$.

Rozwiązanie. Dla dowolnego wierzchołka $v \in V$ mamy $\deg_{\overline{G}}(v) = |V| - 1 - \deg_G(v)$. Stąd $\Delta(\overline{G}) = |V| - 1 - \delta(G)$ i dalej

$$\Delta(G) + \Delta(\overline{G}) = \Delta(G) + |V| - 1 - \delta(G).$$

Ponieważ $\delta(G) \geq 0$ i $\Delta(G) \leq |V| - 1$ i obie te nierówności nie mogą zachodzić jednocześnie z równością, to $\Delta(G) - \delta(G) \leq |V| - 2$, co w połączeniu z powyższą równością daje

$$\begin{aligned}\Delta(G) + \Delta(\overline{G}) &\leq 2|V| - 3 \\ (\Delta(G) + 1) + (\Delta(\overline{G}) + 1) &\leq 2|V| - 1.\end{aligned}$$

Stosując twierdzenie Vizinga otrzymujemy

$$\chi'(G) + \chi'(\overline{G}) \leq (\Delta(G) + 1) + (\Delta(\overline{G}) + 1) \leq 2|V| - 1,$$

co kończy dowód.

Definicje, twierdzenia, wzory.

G jest grafem o zbiorze wierzchołków V i zbiorze krawędzi E . Oznaczamy $n := |V|$ i $m := |E|$. Dla $X \subseteq V$ przez $G[X]$ oznaczamy podgraf G indukowany przez zbiór X , czyli $(X, \{e \in E \mid e \subseteq X\})$.

Spójność.

Def. Graf jest **spójny**, jeśli dla dowolnych dwóch wierzchołków u, v istnieje $u-v$ ścieżka. Graf jest **k -spójny**, jeśli $|G| > k$ i dla każdego $V' \subseteq V$, $|V'| < k$ graf $G - V'$ jest spójny. Graf jest **k -spójny krawędziowo**, jeśli $|E| > 0$ i dla każdego $X \subseteq E$, $|X| < k$ graf $G - X$ jest spójny.

Def. Spójność wierzchołkowa, ozn. $\kappa(G)$ – największe k , dla którego graf jest k -spójny.

Def. Spójność krawędziowa, ozn. $\kappa'(G)$ – największe k , dla którego graf jest krawędziowo k -spójny.

Nierówność Whitneya. $\kappa(G) \leq \kappa'(G) \leq \delta(G)$.

Tw. Menger 1. Dla dowolnych $A, B \subseteq V$, niech k będzie rozmiarem najmniejszego $A-B$ -separatora. W G istnieje k rozłącznych $A-B$ ścieżek.

Tw. Menger 2. Graf G jest k -spójny wtw. gdy dla każdej pary wierzchołków u, v istnieje k wewnętrznich rozłącznych $u-v$ ścieżek.

Tw. Menger 3. Graf G jest k -spójny wtw. gdy dla każdego $x \in V$ i $U \subseteq V \setminus \{x\}$, $|U| = k$, istnieje $x-U$ -wachlarz, czyli k wew. rozłącznych ścieżek o początku w x i końcach w różnych wierzchołkach z U .

Tw. Menger 4. Graf G jest k -spójny krawędziowo wtw. gdy dla każdej pary wierzchołków u, v istnieje k krawędziowo rozłącznych $u-v$ ścieżek.

Obwód Eulera.

Tw. Eulera (wersja z obwodem). Multigraf spójny ma obwód Eulera wtw. gdy każdy wierzchołek ma stopień parzysty.

Tw. Eulera (wersja z drogą). Multigraf spójny ma drogę Eulera wtw. gdy liczba wierzchołków stopnia nieparzystego jest mniejsza lub równa 2.

Cykl Hamiltona.

Warunek konieczny. Jeśli G ma cykl Hamiltona, to dla każdego $S \subseteq V$, $S \neq \emptyset$ graf $G - S$ ma co najwyżej $|S|$ spójnych składowych.

Tw. Diraca (warunek dostateczny). Jeśli G jest prosty i $n \geq 3$ oraz dla każdego $v \in V$ zachodzi $\deg(v) \geq \frac{n}{2}$, to G jest hamiltonowski.

Tw. Ore'go (warunek dostateczny). Jeśli G jest prosty i $n \geq 3$ oraz dla każdych u, v takich, że $uv \notin E$, zachodzi $\deg(u) + \deg(v) \geq n$, to G jest hamiltonowski.

Kolorowanie krawędzi.

Tw. Vizinga. $\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$.

Kolorowanie wierzchołków.

Def. Zbiór niezależny – zbiór wierzchołków takich, że żadne dwa nie są połączone krawędzią.

Def. Graf G jest **krytyczny**, jeśli dla każdego jego właściwego podgrafu H zachodzi $\chi(H) < \chi(G)$. Graf jest **k -krytyczny**, jeśli jest krytyczny i $\chi(G) = k$.

Lemat. Jeśli G jest k -krytyczny, to $\delta(G) \geq k - 1$.

Tw. $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$ (algorytm zachłanny).

Tw. Brooksa Jeśli graf spójny G nie jest nieparzystym cyklem ani grafem pełnym, to $\chi(G) \leq \Delta(G)$.

Tw. Mycielskiego. Dla każdego k istnieje graf G_k bez trójkątów taki, że $\chi(G_k) = k$.

Def. Talią grafu nazywamy długość najkrótszego cyklu w tym grafie.

Tw. Erdősa Dla dowolnych $k, \ell \in \mathbb{N}$ istnieje graf G taki, że $\chi(G) \geq k$ i talia grafu G jest co najmniej ℓ .

Skojarzenia.

Def. **Skojarzeniem** nazywamy zbiór rozłącznych krawędzi grafu. Skojarzeniem **maksymalnym** nazywamy skojarzenie, które nie jest podzbiorem żadnego innego skojarzenia. Skojarzeniem **doskonałym** nazywamy skojarzenie, które pokrywa każdy wierzchołek.

Def. Ścieżką naprzemienną względem skojarzenia M nazywamy ścieżkę, której krawędzie na przemian należą i nie należą do M . Ścieżka jest **powiększająca** względem skojarzenia M , jeśli jest naprzemienna względem M oraz zaczyna i kończy się w wierzchołku niepokrytym przez M .

Tw. Berge'a. Skojarzenie M jest największe wtw, gdy nie ma ścieżki

powiększającej względem M .

Tw. Halla. Niech G będzie grafem dwudzielnym o klasach dwudzielności X, Y . W G istnieje skojarzenie pokrywające X wtw, gdy dla każdego $X' \subseteq X$ zachodzi $|N(X')| \geq |X'|$.

Sieci i przepływy.

Niech $N = (G, c, s, t)$ będzie siecią, $G = (V, A)$. Dla funkcji $f : A \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ definiujemy:

- Dla $v \in V$: $f^+(v) := \sum_{u:vu \in A} f(vu)$ i $f^-(v) := \sum_{u:uv \in A} f(uv)$
- Dla $S \subseteq V$: $f^+(S) := \sum_{\substack{uv \in A \\ u \in S \\ v \notin S}} f(uv)$ i $f^-(S) := \sum_{\substack{vu \in A \\ u \in S \\ v \notin S}} f(vu)$

Def. Funkcję $f : A \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ nazywamy **przepływem**, jeśli dla każdego $a \in A$ zachodzi $f(a) \leq c(a)$ oraz dla każdego $v \in V \setminus \{s, t\}$ zachodzi $f^+(v) = f^-(v)$.

Def. Wartość przepływu f to $\text{val } f := f^+(s) - f^-(s)$.

Fakt. $f^+(s) - f^-(s) = f^-(t) - f^+(t)$.

Def. Dla dowolnego $S \subseteq V$ takiego, że $s \in S$ i $t \in \bar{S} := V \setminus S$, **przekrojem** $(S, \bar{S})$ nazywamy zbiór krawędzi o początku w S i końcu w $\bar{S}$. **Przepustowością** przekroju $K = (S, \bar{S})$ nazywamy $\text{cap } K := \sum_{a \in K} c(a)$.

Lemat. Dla dowolnego przepływu f i dowolnego przekroju $(S, \bar{S})$ zachodzi $\text{val } f = f^+(S) - f^-(S)$.

Tw. Dla dowolnego przepływu f i dowolnego przekroju K zachodzi $\text{val } f \leq \text{cap } K$. Jeśli $\text{val } f = \text{cap } K$, to f jest największym przepływem, a K najmniejszym przekrojem.

Def. Dla ścieżki P (niekoniecznie skierowanej), przepływu f i łuku a z P definiujemy:

$$r(a) = \begin{cases} c(a) - f(a) & \text{jeśli } a \text{ jest krawędzią w przód,} \\ f(a) & \text{jeśli } a \text{ jest krawędzią w tył.} \end{cases}$$

Dla ścieżki P definiujemy $r(P) := \min_{a \in \text{łuk } P} r(a)$.

Ścieżka P jest **powiększająca** jeśli jest $s-t$ ścieżką i $r(P) > 0$. Wówczas można zdefiniować przepływ $\hat{f}(a)$ jako:

$$\hat{f}(a) = \begin{cases} f(a) + r(P), & \text{jeśli } a \in A(P) \text{ jest łukiem w przód,} \\ f(a) - r(P), & \text{jeśli } a \in A(P) \text{ jest łukiem w tył} \\ f(a), & \text{jeśli } a \notin A(P). \end{cases}$$

Tw. Forda-Fulkersona. Przepływ f jest największy wtw. gdy nie ma ścieżki powiększającej.

Wniosek Jeśli f^* jest największym przepływem, a $\tilde{K}$ najmniejszym przekrojem, to $\text{cap } \tilde{K} = \text{val } f^*$.

Planarność.

Tw. Kuratowskiego. Graf G jest planarny wtw. gdy nie zawiera podpodziału $K_{3,3}$ lub K_5 .

Tw. Dla grafu płaskiego G zachodzi $\sum_{f \in F(G)} \deg_G f = 2m$, gdzie przez $F(G)$ oznaczamy zbiór regionów (ścian) grafu płaskiego G .

Formuła Eulera. Dla spójnego grafu płaskiego G zachodzi $n - m + |F(G)| = 2$.

Lemat. Dla prostego grafu planarnego G o $n \geq 3$ wierzchołkach i talii k zachodzi $m \leq k(n-2)/(k-2)$.

Wniosek. Dla prostego grafu planarnego G o $n \geq 3$ wierzchołkach zachodzi $m \leq 3n - 6$.

Wniosek. Każdy graf planarny ma wierzchołek stopnia co najwyżej 5.

Tw. o czterech kolorach. Jeśli G jest planarny, to $\chi(G) \leq 4$.

Def. Dla grafu płaskiego G , jego **grafem dualnym** G^* nazywamy graf, którego wierzchołkami są regiony G i istnieje bijekcja między $E(G^*)$ a $E(G)$: krawędź e^* łączy dwa wierzchołki f_1, f_2 w G^* wtw, gdy odpowiadająca jej krawędź e z G jest incydentna z f_1 i f_2 .

Teoria Ramseya.

Def. Liczba Ramseya, ozn. $R(t)$, to najmniejsze n takie, że przy dowolnym dwukolorowaniu krawędzi K_n znajdziemy jednokolorową kopię K_t .

Przez $R(t_1, t_2, \dots, t_k)$ oznaczamy najmniejsze n takie, że przy dowolnym kolorowaniu K_n na k kolorów znajdziemy kopię K_{t_1} w pierwszym kolorze, K_{t_2} w drugim kolorze, ... lub K_{t_k} w k -tym kolorze.

Tw. Ramseya (Erdősa-Szekeres). Dla każdego t zachodzi $R(t) \leq 4^t$.

Tw. Erdősa. Dla $t \geq 3$ zachodzi $R(t) > 2^{t/2}$.

Tw. Dla $s, t > 1$ zachodzi $R(s, t) \leq R(s, t-1) + R(s-1, t)$.

Wniosek. Dla $s, t \geq 1$ zachodzi $R(s, t) \leq \binom{s+t-2}{s-1} = \binom{s+t-2}{t-1}$.