

1. (10p.) Niech $G = (V, A)$ będzie grafem skierowanym takim, że każdy wierzchołek jest incydentny z dokładnie trzema łukami i nie istnieje w G para łuków w obie strony (czyli jeśli (u, v) jest łukiem, to (v, u) nie jest). Rozważmy sieć $N = (G, c, s, t)$, gdzie $c(a) = 3$ dla każdego $a \in A$ i $s, t \in V$. Załóżmy, że istnieje w N przepływ $f : A \rightarrow \mathbb{N}_0$ taki, że dla dowolnego wierzchołka $v \in V$, f nasyca dokładnie jeden łuk incydentny z v , oraz $\text{val} f = 0$. Pokaż, że łuki a , dla których $f(a) = 1$, tworzą skojarzenie doskonałe w grafie otrzymanym z G przez zamianę każdego łuku na nieskierowaną krawędź.

Przypomnijmy, że łuk a jest nasycony przez przepływ f , jeśli $f(a) = c(a)$.

Rozwiązanie. Niech f będzie przepływem spełniającym warunki zadania. Skoro $\text{val} f = 0$, to każdy wierzchołek (łącznie z s i t) spełnia warunek Kirchhoffa. Weźmy dowolny $v \in V$. Zachodzi jedna z dwóch opcji:

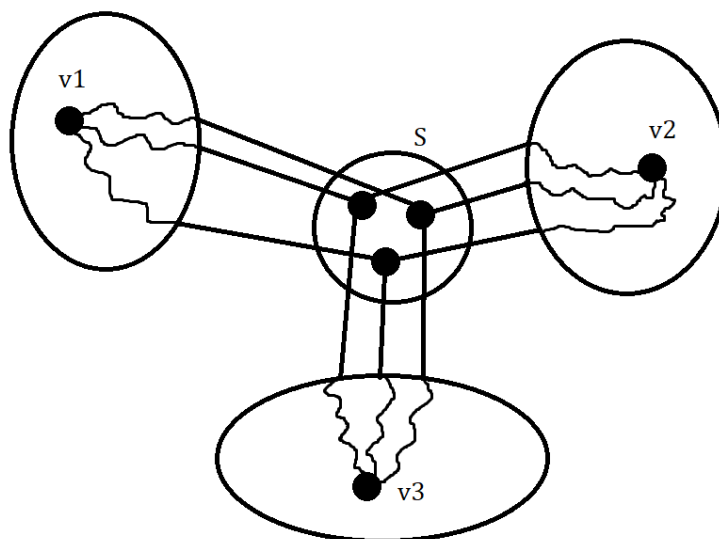
- do v wchodzi jeden łuk i wychodzą dwa,
- do v wchodzi dwa łuki i wychodzi jeden.

Założmy na razie pierwszą opcję, w drugiej rozumowanie przebiegnie analogicznie. Niech a_1, a_2 będą łukami wychodzącymi, a a_3 wchodzącym. Skoro $f : A \rightarrow \mathbb{N}_0$, to możliwe wartości f na łukach G to 0, 1, 2, 3. Zachodzi $f(a_1) + f(a_2) = f^+(v) = f^-(v) = f(a_3)$. Zauważmy, że żaden z a_1 i a_2 nie może być nasycony, bo wtedy a_3 też musiałby być, co przeczy założeniu. Zatem $f(a_3) = 3$, co oznacza, że $f(a_1) = 1$ i $f(a_2) = 2$.

Widzimy więc, że dla dowolnego wierzchołka v dla dokładnie jednego z incydentnych z nim łuków wartość przepływu wynosi 1. Oznacza to, że łuki te są skojarzeniem doskonałym. \square

2. (10p.) Niech G będzie 3-spójnym grafem planarnym. Udowodnij, że nie istnieje zbiór rozcinający licznosci 3, którego usunięcie rozdzieli G na co najmniej trzy spójne składowe.

Rozwiązanie. Załóżmy nie wprost, że $S = \{u_1, u_2, u_3\}$ jest zbiorem rozcinającym w G takim, że $G - S$ ma co najmniej trzy spójne składowe. Wybierzmy po jednym wierzchołku z trzech różnych spójnych składowych $G - S$ i oznaczmy je v_1, v_2, v_3 . Na mocy twierdzenia Mengera wiemy, że dla $i = 1, 2, 3$ istnieje v_i - S -wachlarz. Każdy z tych trzech wachlarzy składa się z wewnętrznie rozłącznych ścieżek, zatem, nie licząc wierzchołków z S , ścieżki z v_i - S -wachlarza zawarte są w i -tej składowej grafu $G - S$. Wobec tego, wachlarze (parami) nie mają wspólnych wierzchołków poza wierzchołkami z S . Połączone trzy wachlarze tworzą zatem podpodział $K_{3,3}$, co, zgodnie z twierdzeniem Kuratowskiego, przeczy planarności grafu G . \square



3. (10p.) Niech $G_k = (P_{3k})^k$. Dla każdego $k \geq 1$ wyznacz $\chi'(G_k)$.

Przypomnijmy, że przez P_t oznaczamy ścieżkę o t wierzchołkach, a dla grafu G mamy $G^k = (V(G), \{uv \mid 0 < \text{dist}_G(u, v) \leq k\})$.

Rozwiązanie. Wykażemy, że $\chi'(G_k) = 2k$. Oznaczmy wierzchołki ścieżki P_{3k} jako v_1, v_2, \dots, v_{3k} . Dalej, ponieważ wierzchołek v_{k+1} sąsiaduje w G_k z $v_1, v_2, \dots, v_k, v_{k+2}, v_{k+3}, \dots, v_{2k+1}$, mamy $\chi'(G_k) \geq \Delta(G_k) \geq \deg_{G_k}(v_{k+1}) = 2k$. Pokażemy teraz poprawne kolorowanie krawędzi na $2k$ kolorów.

Powiemy, że *długością* krawędzi $v_i v_j$ jest liczba $|i - j|$. W grafie G_k występują krawędzie o długościach $1, 2, \dots, k$. Niech E_ℓ oznacza zbiór krawędzi długości ℓ , zauważmy, że zbiory E_ℓ są podziałem zbioru krawędzi grafu.

Rozważmy graf H_ℓ oznacza graf indukowany przez krawędzie E_ℓ . Każdy wierzchołek o indeksie mniejszym niż $\ell + 1$ lub większym niż $3k - \ell$ ma w tym grafie stopień 1, zaś każdy z pozostałych wierzchołków ma stopień 2. Każda składowa grafu H_ℓ jest ścieżką. Zatem każdą składową H_ℓ (a więc i cały graf H_ℓ) można poprawnie pokolorować krawędziowo dwoma kolorami.

Używając innej pary kolorów dla każdego z grafów H_1, \dots, H_k uzyskujemy poprawne kolorowanie krawędzi grafu G_k na $2k$ kolorów, co pokazuje, że $\chi'(G_k) \leq 2k$.

Podsumowując, otrzymujemy żadaną równość: $\chi'(G_k) = 2k$. □

4. (10p.) Niech G będzie grafem eulerowskim o $n \geq 3$ wierzchołkach, gdzie n jest liczbą nieparzystą. Pokaż, w G istnieją trzy wierzchołki o tym samym stopniu.

Rozwiązanie. Graf G jest eulerowski, więc każdy jego wierzchołek ma stopień parzysty. Dodatkowo, jest spójny, więc nie ma wierzchołka stopnia 0. Zatem możliwe stopnie wierzchołków to: $2, 4, \dots, n-1$. Możliwych wartości stopni jest $(n-1)/2 < n/2$, więc z zasady szufladkowej otrzymujemy tezę. \square

5. (10p.) Niech $R(P_k)$ oznacza najmniejsze n , takie że w każdym kolorowaniu krawędzi grafu K_n kolorami czerwonym i niebieskim znajdziemy jednokolorową ścieżkę o k wierzchołkach. Pokaż, że $R(P_4) = 5$.

Pokażemy, że $R(P_4) = 5$. Aby uzasadnić, że $R(P_4) \leq 5$, rozważmy graf K_5 pokolorowany kolorami czerwonym i niebieskim. Nazwijmy jego wierzchołki a, b, c, d, e . Z wierzchołka a wychodzą dwie krawędzie w tym samym kolorze, bez straty ogólności niech będą to krawędzie ab i ac i niech będą czerwone.

Jeśli jedna z krawędzi między $\{b, c\}$ a $\{d, e\}$ jest czerwona, dostaniemy czerwoną ścieżkę o czterech wierzchołkach. Jeśli natomiast wszystkie są niebieskie, otrzymujemy niebieską ścieżkę o wierzchołkach b, d, c, e . Zatem w każdym dwukolorowaniu K_5 znajdziemy jednokolorową kopię P_4 .

Aby pokazać, że $R(P_4) > 4$, musimy wskazać dwukolorowanie krawędzi K_4 , w którym nie ma jednokolorowej kopii P_4 . Weźmy cztery wierzchołki a, b, c, d . Wierzchołki a, b, c tworzą czerwony trójkąt, zaś wszystkie krawędzie wychodzące z d kolorujemy na niebiesko. To pokazuje, że istotnie $R(P_4) > 4$.

Obie nierówności dają nam tezę. □

Definicje, twierdzenia, wzory.

G jest grafem o zbiorze wierzchołków V i zbiorze krawędzi E . Oznaczamy $n := |V|$ i $m := |E|$. Dla $X \subseteq V$ przez $G[X]$ oznaczamy podgraf G indukowany przez zbiór X , czyli $(X, \{e \in E \mid e \subseteq X\})$.

Spójność.

Def. Graf jest **spójny**, jeśli dla dowolnych dwóch wierzchołków u, v istnieje $u-v$ -ścieżka. Graf jest **k -spójny**, jeśli $|G| > k$ i dla każdego $V' \subseteq V$, $|V'| < k$ graf $G - V'$ jest spójny. Graf jest **k -spójny krawędziowo**, jeśli $|E| > 0$ i dla każdego $X \subseteq E$, $|X| < k$ graf $G - X$ jest spójny.

Def. **Spójność wierzchołkowa**, ozn. $\kappa(G)$ – największe k , dla którego graf jest k -spójny.

Def. **Spójność krawędziowa**, ozn. $\kappa'(G)$ – największe k , dla którego graf jest krawędziowo k -spójny.

Nierówność Whitneya. $\kappa(G) \leq \kappa'(G) \leq \delta(G)$.

Tw. Mengersa 1. Dla dowolnych $A, B \subseteq V$, niech k będzie rozmiarem najmniejszego A - B -separatora. W G istnieje k rozłącznych $A - B$ ścieżek.

Tw. Mengersa 2. Graf G jest k -spójny wtw. gdy dla każdej pary wierzchołków u, v istnieje k wewnątrznie rozłącznych $u-v$ ścieżek.

Tw. Mengersa 3. Graf G jest k -spójny wtw. gdy dla każdego $x \in V$ i $U \subseteq V \setminus \{x\}$, $|U| = k$, istnieje $x-U$ -wachlarz, czyli k wew. rozłącznych ścieżek o początku w x i końcach w różnych wierzchołkach z U .

Tw. Mengersa 4. Graf G jest k -spójny krawędziowo wtw. gdy dla każdej pary wierzchołków u, v istnieje k krawędziowo rozłącznych $u-v$ ścieżek.

Obwód Eulera.

Tw. Eulera (wersja z obwodem). Multigraf spójny ma obwód Eulera wtw. gdy każdy wierzchołek ma stopień parzysty.

Tw. Eulera (wersja z drogą). Multigraf spójny ma drogę Eulera wtw. gdy liczba wierzchołków stopnia nieparzystego jest mniejsza lub równa 2.

Cykl Hamiltona.

Warunek konieczny. Jeśli G ma cykl Hamiltona, to dla każdego $S \subseteq V$, $S \neq \emptyset$ graf $G - S$ ma co najwyżej $|S|$ spójnych składowych.

Tw. Diraca (warunek dostateczny). Jeśli G jest prosty i $n \geq 3$ oraz dla każdego $v \in V$ zachodzi $\deg(v) \geq \frac{n}{2}$, to G jest hamiltonowski.

Tw. Ore'go (warunek dostateczny). Jeśli G jest prosty i $n \geq 3$ oraz dla każdych u, v takich, że $uv \notin E$, zachodzi $\deg(u) + \deg(v) \geq n$, to G jest hamiltonowski.

Kolorowanie krawędzi.

Tw. Vizinga. $\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$.

Kolorowanie wierzchołków.

Def. Zbiór niezależny – zbiór wierzchołków takich, że żadne dwa nie są połączone krawędzią.

Def. Graf G jest **krytyczny**, jeśli dla każdego jego właściwego podgrafu H zachodzi $\chi(H) < \chi(G)$. Graf jest **k -krytyczny**, jeśli jest krytyczny i $\chi(G) = k$.

Lemat. Jeśli G jest k -krytyczny, to $\delta(G) \geq k - 1$.

Tw. $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$ (algorytm zachłanny).

Tw. Brooksa Jeśli graf spójny G nie jest nieparzystym cyklem ani grafem pełnym, to $\chi(G) \leq \Delta(G)$.

Tw. Mycielskiego. Dla każdego k istnieje graf G_k bez trójkątów taki, że $\chi(G_k) = k$.

Def. Talią grafu nazywamy długość najkrótszego cyklu w tym grafie.

Tw. Erdősa Dla dowolnych $k, \ell \in \mathbb{N}$ istnieje graf G taki, że $\chi(G) \geq k$ i talia grafu G jest co najmniej ℓ .

Skojarzenia.

Def. **Skojarzeniem** nazywamy zbiór rozłącznych krawędzi grafu. Skojarzeniem **maksymalnym** nazywamy skojarzenie, które nie jest podzbiorem żadnego innego skojarzenia. Skojarzeniem **doskonałym** nazywamy skojarzenie, które pokrywa każdy wierzchołek.

Def. Ścieżką naprzemienną względem skojarzenia M nazywamy ścieżkę, której krawędzie na przemian należą i nie należą do M . Ścieżka jest **powiększająca** względem skojarzenia M , jeśli jest naprzemienna względem M oraz zaczyna i kończy się w wierzchołku niepokrytym przez M .

Tw. Berge'a. Skojarzenie M jest największe wtw, gdy nie ma ścieżki

powiększającej względem M .

Tw. Halla. Niech G będzie grafem dwudzielnym o klasach dwudzielności X, Y . W G istnieje skojarzenie pokrywające X wtw, gdy dla każdego $X' \subseteq X$ zachodzi $|N(X')| \geq |X'|$.

Sieci i przepływy.

Niech $N = (G, c, s, t)$ będzie siecią, $G = (V, A)$. Dla funkcji $f : A \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ definiujemy:

- Dla $v \in V$: $f^+(v) := \sum_{u:vu \in A} f(vu)$ i $f^-(v) := \sum_{u:uv \in A} f(uv)$
- Dla $S \subseteq V$: $f^+(S) := \sum_{\substack{uv \in A \\ u \in S \\ v \notin S}} f(uv)$ i $f^-(S) := \sum_{\substack{vu \in A \\ u \in S \\ v \notin S}} f(vu)$

Def. Funkcję $f : A \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ nazywamy **przepływem**, jeśli dla każdego $a \in A$ zachodzi $f(a) \leq c(a)$ oraz dla każdego $v \in V \setminus \{s, t\}$ zachodzi $f^+(v) = f^-(v)$.

Def. Wartość przepływu f to $\text{val } f := f^+(s) - f^-(s)$.

Fakt. $f^+(s) - f^-(s) = f^-(t) - f^+(t)$.

Def. Dla dowolnego $S \subseteq V$ takiego, że $s \in S$ i $t \in \bar{S} := V \setminus S$, **przekrojem** (S, \bar{S}) nazywamy zbiór krawędzi o początku w S i końcu w \bar{S} . **Przepuszczalnością** przekroju $K = (S, \bar{S})$ nazywamy $\text{cap } K := \sum_{a \in K} c(a)$.

Lemat. Dla dowolnego przepływu f i dowolnego przekroju (S, \bar{S}) zachodzi $\text{val } f = f^+(S) - f^-(S)$.

Tw. Dla dowolnego przepływu f i dowolnego przekroju K zachodzi $\text{val } f \leq \text{cap } K$. Jeśli $\text{val } f = \text{cap } K$, to f jest największym przepływem, a K najmniejszym przekrojem.

Def. Dla ścieżki P (niekoniecznie skierowanej), przepływu f i łuku a z P definiujemy:

$$r(a) = \begin{cases} c(a) - f(a) & \text{jeśli } a \text{ jest krawędzią w przód,} \\ f(a) & \text{jeśli } a \text{ jest krawędzią w tył.} \end{cases}$$

Dla ścieżki P definiujemy $r(P) := \min_{a \in \text{łuk } P} r(a)$.

Ścieżka P jest **powiększająca** jeśli jest s - t ścieżką i $r(P) > 0$. Wówczas można zdefiniować przepływ $\hat{f}(a)$ jako:

$$\hat{f}(a) = \begin{cases} f(a) + r(P), & \text{jeśli } a \in A(P) \text{ jest łukiem w przód,} \\ f(a) - r(P), & \text{jeśli } a \in A(P) \text{ jest łukiem w tył} \\ f(a), & \text{jeśli } a \notin A(P). \end{cases}$$

Tw. Forda-Fulkersona. Przepływ f jest największy wtw. gdy nie ma ścieżki powiększającej.

Wniosek Jeśli f^* jest największym przepływem, a \tilde{K} najmniejszym przekrojem, to $\text{cap } \tilde{K} = \text{val } f^*$.

Planarność.

Tw. Kuratowskiego. Graf G jest planarny wtw. gdy nie zawiera podpodziału $K_{3,3}$ lub K_5 .

Tw. Dla grafu płaskiego G zachodzi $\sum_{f \in F(G)} \deg_G f = 2m$, gdzie przez $F(G)$ oznaczamy zbiór regionów (ścian) grafu płaskiego G .

Formuła Eulera. Dla spójnego grafu płaskiego G zachodzi $n - m + |F(G)| = 2$.

Lemat. Dla prostego grafu planarnego G o $n \geq 3$ wierzchołkach i talii k zachodzi $m \leq k(n - 2)/(k - 2)$.

Wniosek. Dla prostego grafu planarnego G o $n \geq 3$ wierzchołkach zachodzi $m \leq 3n - 6$.

Wniosek. Każdy graf planarny ma wierzchołek stopnia co najwyżej 5.

Tw. o czterech kolorach. Jeśli G jest planarny, to $\chi(G) \leq 4$.

Def. Dla grafu płaskiego G , jego **grafem dualnym** G^* nazywamy graf, którego wierzchołkami są regiony G i istnieje bijekcja między $E(G^*)$ a $E(G)$: krawędź e^* łączy dwa wierzchołki f_1, f_2 w G^* wtw, gdy odpowiada jącej krawędź e z G jest incydentna z f_1 i f_2 .

Teoria Ramseya.

Def. Liczba Ramseya, ozn. $R(t)$, to najmniejsze n takie, że przy dowolnym dwukolorowaniu krawędzi K_n znajdziemy jednokolorową kopię K_t . Przez $R(t_1, t_2, \dots, t_k)$ oznaczamy najmniejsze n takie, że przy dowolnym kolorowaniu K_n na k kolorów znajdziemy kopię K_{t_1} w pierwszym kolorze, K_{t_2} w drugim kolorze, ... lub K_{t_k} w k -tym kolorze.

Tw. Ramseya (Erdősa-Szekeres). Dla każdego t zachodzi $R(t) \leq 4^t$.

Tw. Erdősa. Dla $t \geq 3$ zachodzi $R(t) > 2^{t/2}$.

Tw. Dla $s, t > 1$ zachodzi $R(s, t) \leq R(s, t - 1) + R(s - 1, t)$.

Wniosek. Dla $s, t \geq 1$ zachodzi $R(s, t) \leq \binom{s+t-2}{s-1} = \binom{s+t-2}{t-1}$.