Zad. 1	Zad. 2	Zad. 3	Zad. 4	Zad. 5	SUMA

1. (10p.) Niech $G = (V, E)$ będzie grafem. Pokaż, że jeśli graf $G \times K_2$ jest eulerowski, to $2||V|$.

Przypomnijmy, że $G \times H$ jest grafem którego zbiorem wierzchołków jest $V(G) \times V(H)$, a wierzchołki (v, w) i (v', w') są połączone krawędzią, jeśli $v = v'$ i $ww' \in E(H)$ lub $vv' \in E(G)$ i $w = w'$.

Rozwiązanie. Skoro $G \times K_2$ jest eulerowski, to każdy wierzchołek tego grafu ma parzysty stopień. Mamy też $\deg_{G\times K_2}(v, w) = \deg_G(v) + 1$, a więc każdy wierzchołek grafu G ma nieparzysty stopień. Z lematu o uściskach dłoni wynika zatem, że $|V|$ jest liczbą parzystą. $\square$

2. (10p.) Niech $G = (V, E)$ będzie grafem, którego wszystkie wierzchołki mają nieparzysty stopień. Niech M będzie skojarzeniem doskonałym w G. Wykaż, że każdy most grafu G należy do M.

Rozwiązanie. Skoro graf G ma skojarzenie doskonałe, to ma parzyście wiele wierzchołków. Rozważmy most e w grafie G, jego usunięcie rozbija graf na dwie spójne składowe. Przypuśćmy, że e nie należy do M. To znaczy, że graf $G-e$ ma skojarzenie doskonałe (mianowicie M). A to oznacza, że każda ze składowych grafu $G-e$ ma parzystą liczbę wierzchołków. Rozważmy jedną z tych składowych, nazwijmy ją A. Zauważmy, że wszystkie wierzchołki A poza jednym, incydentnym z e, mają w A nieparzyste stopnie. Wierzchołek indycentny z e ma w A parzysty stopień. Zatem w A jest nieparzyście wiele wierzchołków nieparzystego stopnia, co jest sprzeczne z lematem o uściskach dłoni. $\square$

3. (10p.) Niech G będzie grafem o n wierzchołkach, w którym dla każdej pary niesąsiadujących wierzchołków u i v zachodzi $\deg u + \deg v \geqslant n - 1$. Pokaż, że G jest spójny.

Rozwiązanie. Rozważmy dwa dowolne wierzchołki u i v grafu G. Pokażemy, że jest między nimi ścieżka w grafie G. Jeśli u i v sąsiadują, taka ścieżka oczywiście istnieje składa się z jednej krawędzi uv. Przypuśmy zatem, że wierzchołki te nie sąsiadują. Z założenia wiemy, że $\deg u + \deg v \geqslant n - 1$. Z faktu, że zbiór $V(G) \setminus \{u, v\}$ ma $n - 2$ elementy wnioskujemy, że wierzchołki u i v muszą mieć wspólnego sąsiada, nazwijmy go x. Wtedy uxv jest szukaną ścieżką łączącą u i v. $\square$

4. (10p.) Rozważmy kolorowanie grafu takie, że ten sam kolor nie może być przypisany wierzchołkom, które sąsiadują, ani wierzchołkom, które mają wspólnego sąsiada. Przez $\chi^*(G)$ oznaczmy najmniejszą liczbę kolorów, która umożliwia pokolorowanie grafu G w sposób opisany powyżej.

Pokaż, że jeśli w spójnym grafie G istnieją dwa niesąsiadujące wierzchołki, które nie mają wspólnego sąsiada, to $\chi^*(G) \leqslant \Delta^2(G)$.

Rozwiązanie. Wprowadźmy oznaczenie $\Delta := \Delta(G)$. Rozważmy graf G^2, czyli graf, który powstaje z G przez dodanie krawędzi między wierzchołkami o wspólnym sąsiedzie. Oczywiście $\chi^*(G) = \chi(G^2)$.

Rozważmy dowolny wierzchołek v i oszacujmy liczbę jego sąsiadów w G^*. Ma on co najwyżej Δ sąsiadów z grafu G, każdy z nich ma co najwyżej $\Delta - 1$ sąsiadów innych niż v. Zatem stopień dowolnego wierzchołka w G^* wynosi co najwyżej $\Delta + \Delta(\Delta - 1) = \Delta + \Delta^2 - \Delta = \Delta^2$.

Z twierdzenia Brooksa wiemy, że jeśli graf G^* nie jest grafem pełnym ani nieparzystym cyklem, to $\chi(G^*) \leqslant \Delta(G^*)$, zatem w tym przypadku mamy

$$\chi^*(G) = \chi(G^2) \leqslant \Delta(G^2) \leqslant \Delta^2.$$

Zauważmy teraz, że skoro w grafie G istnieją wierzchołki x i y, które są nie sąsiadują ani nie mają wspólnego sąsiada, to graf G^2 nie jest grafem pełnym. Wreszcie, graf G^2 nie może być cyklem nieparzystym innym niż trójkąt: rozważmy na przykład trzy pierwsze wierzchołki z najkrótszej ścieżki w grafie G, która łączy wierzchołki x i y, niech te wierzchołki nazywają się x, a, b. Zauważmy, że w grafie G^* te trzy wierzchołki indukują trójkąt, a cykl nieparzysty długości co najmniej 5 nie ma żadnych trójkątów.

Na marginesie, zauważmy że dodatkowe założenie na graf G jest konieczne, rozważmy na przykład $G = C_5$, wtedy $G^2 = K_5$ i $\chi^*(G) = \chi(G^2) = 5 > 4 = \Delta(G)^2$. $\square$

5. (10p.) Niech G będzie spójnym prostym grafem płaskim samodualnym (izomorficznym ze swoim multigrafem dualnym) o co najmniej trzech wierzchołkach. Udowodnij, że w grafie G co najmniej dwa wierzchołki mają stopnie nie większe niż 3.

Rozwiązanie. Niech n oznacza liczbę wierzchołków w grafie G, m liczbę krawędzi, a f liczbę jego ścian. Zatem liczba wierzchołków w grafie G^* wynosi f i z samodualności G otrzymujemy $n = f$.
Nie wprost załóżmy, że w G istnieje co najwyżej jeden taki wierzchołek stopnia co najwyżej 3. Z lematu o uściskach dłoni otrzymujemy:

$$2m = \sum_{v \in V(G)} \deg v \geq 4(n-1) + 1 = 4n - 3.$$

Z formuły Eulera otrzymujemy:

$$2m = 2(n + f - 2) = 2(2n - 2) = 4n - 4.$$

Zatem mamy sprzeczność: $4n - 4 = 2m \geq 4n - 3$. □