1. (10p.) Pokaż, że graf G nie zawiera indukowanej ścieżki o trzech wierzchołkach wtedy i tylko wtedy, gdy każda jego spójna składowa jest grafem pełnym.

Przypomnijmy, graf G zawiera indukowaną ścieżkę o trzech wierzchołkach, jeśli istnieje taki zbiór $X \subseteq V(G)$, że graf $G[X]$, czyli podgraf indukowany przez X, jest ścieżką o trzech wierzchołkach.

Rozwiązanie. Przypuśćmy najpierw, że każda składowa G jest grafem pełnym. Oczywiście nie może on zawierać indukowanej ścieżki o trzech wierzchołkach, bo w tym grafie każde dwa wierzchołki w tej samej spójnej składowej są połączone krawędzią, a końce ścieżki P_3 nie sąsiadują.

Pokażmy zatem implikację w drugą stronę. Rozważmy składową C grafu G, która nie jest grafem pełnym. Weźmy dwie wierzchołki x, y, które ze sobą nie sąsiadują i rozważmy najkrótszą ścieżkę P między tymi wierzchołkami. Ocznaczmy jej kolejne wierzchołki jako $v_1, v_2, \ldots, v_d$, gdzie $v_1 = x$ i $v_d = y$. Skoro C nie jest grafem pełnym, to $d \geqslant 3$. Twierdzimy, że zbiór $\{v_1, v_2, v_3\}$ indukuje ścieżkę P_3. Oczywiście v_1v_2 i v_2v_3 są krawędziami. Gdyby wierzchołki v_1 i v_3 sąsiadowały, ścieżka $v_1v_3 \ldots v_d$ byłaby krótszą v_1-v_d-ścieżką w C niż P, co przeczy wyborowi P. □

2. (10p.) Niech L będzie skończonym zbiorem pewnych prostych na płaszczyźnie zawierającym osie pewnego ustalonego kartezjańskiego układu współrzędnych (czyli w tym układzie współrzędnych proste o równaniach $y = 0$ i $x = 0$). Rozważmy graf G, którego wierzchołkami są proste ze zbioru L, a wierzchołki k i ℓ sąsiadują w G, jeśli jako proste są prostopadłe. Wyznaczyć $\chi(G)$.

Rozwiązanie. Niech $\ell \in L$ będzie dowolnie wybraną prostą. Niech $A := \{k \in L : k||\ell\}$, a $B := \{k \in L : k \perp \ell\}$. Zauważmy, że podgraf H grafu G indukowany przez zbiór $A \cup B$ jest grafem dwudzielnym (nawet dwudzielnym pełnym) o klasach dwudzielności A i B. Ponadto wierzchołki z $A \cup B$ nie sąsiadują z żadnymi innymi wierzchołkami grafu G, bo każdy sąsiad wierzchołka ze zbioru A jest prostopadły do ℓ (więc należy do zbioru B), a każdy sąsiad wierzchołka ze zbioru B jest równoległy z prostą ℓ (należy więc do A). (Krócej mówiąc H jest składową grafu G.) Możemy więc poprawnie pokolorować wierzchołki podgrafu H na dwa kolory. To samo możemy zrobić z każdą inną składową tego grafu, więc $\chi(G) \leqslant 2$. Ponieważ osie układu współrzędnych sąsiadują ze sobą w G, to $\chi(G) \geqslant 2$. $\square$

3. (10p.) Przypomnijmy, że dla grafu G przez $\alpha(G)$ oznaczamy liczbę wierzchołków w największym zbiorze niezależnym w G, zaś przez $\omega(G)$ liczbę wierzchołków w największej klice w G. Zdefiniujmy funkcję

$$F(n) = \min_{\{G : |V(G)|=n\}} \big(\alpha(G) \cdot \omega(G)\big).$$

Pokaż, że F jest niemalejąca i nieograniczona (czyli nie istnieje stała k taka, że dla każdego n zachodzi $F(n) \leqslant k$).

Rozwiązanie. Najpierw pokażemy, że F jest niemalejąca, czyli dla każdego $n \geqslant 1$ zachodzi $F(n+1) \geqslant F(n)$. Rozważmy graf H o $n+1$ wierzchołach, realizujący $F(n+1)$, czyli taki, dla którego $\alpha(H) \cdot \omega(H)$ jest minimalne. Niech H' będzie grafem otrzymanym z H przez usunięcie jednego wierzchołka, czyli H' ma n wierzchołków. Oczywiście $\alpha(H) \geqslant \alpha(H')$ i $\omega(H) \geqslant \omega(H')$. Zatem

$$F(n) = \min_{G,\ |V(G)|=n} \big(\alpha(G) \cdot \omega(G)\big) \leqslant \alpha(H') \cdot \omega(H') \leqslant \alpha(H) \cdot \omega(H) = F(n+1).$$

Przypuśćmy teraz, że funkcja F jest ograniczona, czyli istnieje taka stała k, że dla każdego n mamy $F(n) \leqslant k$. Przypomnijmy, że z twierdzenia Ramseya wynika, że każdy graf o 4^{k+1} wierzchołkach zawiera zbiór niezależny lub klikę o $k+1$ wierzchołkach. Zatem otrzymujemy, że $F(4^{k+1}) \geqslant k+1$, ponieważ dla każdego grafu G mamy $\alpha(G) \geqslant 1$ i $\omega(G) \geqslant 1$. Oznacza to, że funkcja F nie jest ograniczona przez żadną stałą. $\square$

4. (10p.) Dla dwóch liczb naturalnych n i k, spełniających $1 \leqslant k \leqslant n/2$, graf $G_{n,k}$ tworzymy następująco: $V(G_{n,k}) = \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$ i $wv \in E(G_{n,k})$ wtedy i tylko wtedy gdy $v \neq w$ i $v \equiv w \pmod{k}$. Zbadaj, dla jakich n i k każda spójna składowa grafu $G_{n,k}$ jest eulerowska (tj. ma obwód Eulera).

Rozwiązanie. Przeanalizujmy najpierw strukturę grafu $G_{n,k}$. Ponieważ relacja definiująca istnienie krawędzi jest relacją równoważności, zauważmy, że każda spójna składowa grafu $G_{n,k}$ jest grafem pełnym. Co więcej, ponieważ $n \geqslant 2k$, otrzymujemy, że każda spójna składowa ma co najmniej dwa wierzchołki.

Na podstawie twierdzenia Eulera wiemy, że spójny graf jest Eulerowski wtedy i tylko wtedy, gdy każdy jego wierzchołek ma stopień parzysty. W grafie pełnym o p wierzchołkach stopień każdego wierzchołka wynosi $p-1$, zatem każda spójna składowa grafu $G_{n,k}$ jest eulerowska wtedy i tylko wtedy, gdy każda spójna składowa ma nieparzystą liczbę wierzchołków.

Jakie są rozmiary spójnych składowych grafu $G_{n,k}$? Pewna liczba spójnych składowych ma rozmiar $\lceil \frac{n}{k} \rceil$, a pozostałe mają rozmiar $\lfloor \frac{n}{k} \rfloor$. Zauważmy, że jeśli te liczby są różne, to ich różnica wynosi 1, zatem nie mogą być naraz nieparzyste. Czyli warunkiem koniecznym, aby każda spójna składowa $G_{n,k}$ była eulerowska, jest podzielność n przez k. Wtedy rozmiar każdej spójnej składowej wynosi $\frac{n}{k}$. Podsumowując, graf $G_{n,k}$ spełnia warunki zadania wtedy i tylko wtedy, gdy n jest podzielne przez k i n/k jest nieparzyste. □

5. (10p.) Niech G będzie grafem o m krawędziach i niech $k \in \mathbb{N}$. Pokaż, że jeśli $k \leqslant \left\lceil \frac{m}{\Delta(G)+1} \right\rceil$, to G zawiera podgraf G', taki że $|E(G')| = k$ oraz dla każdego $v \in V(G')$ stopień v w G' jest nieparzysty.

Rozwiązanie. Niech $k' = \left\lceil \frac{m}{\Delta(G)+1} \right\rceil$. Zauważmy, że wystarczy znaleźć w grafie G skojarzenie M, które zawiera k' krawędzi:

- krawędzie M indukują podgraf, w którym stopień każdego wierzchołka jest nieparzysty, a ponadto
- dla każdego $k < k'$ dowolne k krawędzi z M indukuje podgraf, w którym stopień każdego wierzchołka jest nieparzysty.

W ten sposób pokażemy, że taki podgraf istnieje dla każdego $k \leqslant \left\lceil \frac{m}{\Delta(G)+1} \right\rceil$.

Z twierdzenia Vizinga wiemy, że $\chi'(G) \leqslant \Delta(G) + 1$. Weźmy zatem poprawne krawędziowe kolorowanie grafu G na $\Delta(G) + 1$ kolorów. Wiemy, że zbiór krawędzi w jednym kolorze jest skojarzeniem.

Pozostaje pokazać, że co najmniej k' krawędzi jest w jednym kolorze. Skoro jednak musimy pokolorować m krawędzi, a do dyspozycji mamy $\Delta(G) + 1$ kolorów, z zasady szufladkowej wiemy, że musi istnieć kolor, na który pokolorowano $\left\lceil \frac{m}{\Delta(G)+1} \right\rceil = k'$ krawędzi. $\square$