1. (10p.) Niech $n \geqslant p \geqslant 2$. Niech G będzie grafem o n wierzchołkach takim, że dla każdego ciągu p jego wierzchołków $(v_1, \ldots, v_p)$ istnieje cykl, który odwiedza wszystkie te wierzchołki w kolejności $v_1, \ldots, v_p$ (ale niekoniecznie bezpośrednio jeden po drugim). Pokaż, że G jest $(p-1)$-spójny.

Rozwiązanie. Załóżmy nie wprost, że G nie jest $(p-1)$-spójny, czyli istnieje $X \subseteq V(G)$ taki, że $G - X$ niespójny oraz $|X| \leqslant p-2$. Niech x, y będą wierzchołkami z różnych składowych grafu $G - X$. Ustalmy p różnych wierzchołków $v_1, \ldots, v_p$ w taki sposób, że $v_1 = x$, $v_p = y$ oraz $X \subseteq \{v_2, \ldots, v_{p-1}\}$ – takie wierzchołki istnieją z faktu, że $|X| \leqslant p-2$ oraz $n \geqslant p$. Z założeń zadania wiemy, że istnieje cykl C, który zawiera kolejno wierzchołki $v_1, \ldots, v_p$. Zatem na cyklu C istnieje x-y-ścieżka P, która nie zawiera wierzchołków z $\{v_2, \ldots, v_{p-1}\}$. W szczególności, P nie zawiera wierzchołków z X. Ale x i y były w różnych składowych grafu $G - X$, sprzeczność. $\square$

2. (10p.) Niech G będzie spójnym dwudzielnym grafem planarnym o klasach dwudzielności A i B. Załóżmy, że dla każdego $v \in B$ zachodzi $\deg(v) \geqslant 3$. Wykaż, że $|B| < 2|A|$.

Rozwiązanie. Oznaczmy przez n i m, odpowiednio, liczbę wierzchołków i krawędzi G. Zauważmy, że jeśli $B = \emptyset$, wówczas teza w trywialny sposób zachodzi. Skoro tak, możemy założyć, że $|B| \geqslant 1$. Z tego, i z faktu, że dla każdego $v \in B$ mamy $\deg(v) \geqslant 3$, wynika, że $n \geqslant 4$.

Najpierw pokażemy, że $m < 2n$. Rozważmy dwa przypadki: G jest drzewem albo zawiera cykl. Jeśli G jest drzewem, wówczas zachodzi $m = n - 1$, a $n - 1 < 2n$, gdy $n \geqslant 4$. Jeśli G zawiera cykl, oznaczmy przez k talię grafu G (czyli długość najkrótszego cyklu). Zauważmy, że $k \geqslant 4$, ponieważ jeśli istniałby w G cykl o trzech wierzchołkach, G nie byłby dwudzielny. Pokazaliśmy na ćwiczeniach, że $m \leqslant \frac{k(n-2)}{k-2}$, jeśli więc $k \geqslant 4$, otrzymujemy $m \leqslant 2(n-2) = 2n - 4 < 2n$.

Z drugiej strony, ponieważ G jest dwudzielny oraz dla każdego $v \in B$ zachodzi $\deg(v) \geqslant 3$, dostajemy, że $m \geqslant 3|B|$. Razem dostajemy $3|B| \leqslant m < 2n = 2(|A| + |B|)$ czyli $|B| < 2|A|$, co należało pokazać. $\square$

3. (10p.) Niech $G = (V, A)$ będzie grafem skierowanym i niech $X, Y \subseteq V$ będą rozłącznymi zbiorami. Niech p będzie rozmiarem największego zbioru P krawędziowo rozłącznych ścieżek skierowanych, z których każda ma początek w X i koniec w Y. Niech q będzie rozmiarem najmniejszego zbioru $Q \subseteq A$, dla którego w $G - Q$ nie ma żadnej skierowanej ścieżki z X do Y.
Pokaż, że $p = q$.

Rozwiązanie. Zdefiniujmy sieć N w następujący sposób. Dodajemy do grafu G dwa nowe wierzchołki s i t. Do zbioru krawędzi dodajemy następujący zbiór:

$$A' := \{sx \mid x \in X\} \cup \{yt \mid y \in Y\}.$$

Przepustowości wszystkich krawędzi z A wynoszą 1, przepustowości krawędzi z A' wynoszą ∞, wierzchołek s jest źródłem, zaś t jest ujściem.

Zauważmy, że każdy przepływ $\mathbf{f}$ z s do t w N jednoznacznie odpowiada pewnemu zbiorowi $\mathsf{val}(\mathbf{f})$ krawędziowo rozłącznych X-Y-ścieżek w G; wynika to z tego, że przepustowości krawędzi z A wynoszą 1. Zatem wartość największego przepływu w N wynosi p.

Z drugiej strony zbiór Q z zadania jest przekrojem w sieci N i jego przepustowość wynosi q. Jest to najmniejszy przekrój w sieci – przekroje zawierające krawędzie z A' mają nieskończoną przepustowość, a spośród takich, które używają tylko krawędzi z A, zbiór Q został wybrany jako najmniejszy.

Zatem z twierdzenia Forda-Fulkersona otrzymujemy, że $p = q$. □

Uwaga: Jeśli razi nas nieskończona przepustowość, zamiast wartości ∞ można bezpiecznie użyć odpowiednio dużej skończonej wartości, na przykład $|A|$. Można też te przepustowości ograniczyć bardziej precyzyjnie, tylko po co?

4. (10p.) Graf nazwiemy *jednoznacznie k-kolorowalnym krawędziowo*, jeśli jego indeks chromatyczny równa się k oraz każde jego poprawne k-kolorowanie krawędziowe indukuje ten sam podział zbioru krawędzi (zbiory krawędzi w tym samym kolorze).

Udowodnij, że jeśli G jest 3-regularnym grafem jednoznacznie 3-kolorowalnym krawędziowo, to G jest hamiltonowski.

Rozwiązanie. Przypuśćmy nie wprost, że G nie ma cyklu Hamiltona. Rozważmy poprawne 3-kolorowanie krawędziowe c grafu G. Ponieważ każdy wierzchołek grafu ma stopień 3, to przy każdym wierzchołku występuje każdy kolor. Krawędzie w ustalonym kolorze są zatem skojarzeniem doskonałym w G. Niech A będzie zbiorem krawędzi w kolorze 1. Graf $G - A$ jest zatem 2-regularny, czyli każda jego składowa jest cyklem. Gdyby $G - A$ miał tylko jedną składową, to byłaby ona cyklem Hamiltona w G, który – jak założyliśmy – nie istnieje, a zatem $G - A$ ma co najmniej dwie składowe; niech H będzie jedną z nich. Zdefiniujmy funkcję $c' : E(G) \to [3]$ następującym wzorem

$$c'(e) := \begin{cases} c(e), & \text{jeśli } e \notin E(H), \\ 2, & \text{jeśli } e \in E(H) \text{ oraz } c(e) = 3, \\ 3, & \text{jeśli } e \in E(H) \text{ oraz } c(e) = 2. \end{cases}$$

Krótko mówiąc zamieniamy tylko kolory na krawędziach z cyklu H. Zauważmy, że c' jest poprawnym 3-kolorowaniem krawędziowym grafu G, które indukuje inny podział zbioru krawędzi niż kolorowanie c, co daje sprzeczność. $\square$

5. (10p.) Niech $G = (V, E)$ będzie grafem k-krytycznym. Pokaż, że dla każdego wierzchołka $v \in V$ istnieje takie poprawne k-kolorowanie c grafu G, dla którego kolor k występuje jedynie na wierzchołku v oraz

$$\{c(u) : u \in N_G(v)\} = \{1, \ldots, k-1\}.$$

Rozwiązanie. Niech v będzie dowolnym wierzchołkiem grafu G. Ponieważ G jest k-krytyczny, to istnieje poprawne $(k-1)$-kolorowanie b grafu $G-v$. Gdyby któryś z tych $(k-1)$ kolorów, powiedzmy i, nie występował na wierzchołkach ze zbioru $N_G(v)$, to rozszerzając kolorowanie b na graf G poprzez przypisanie wierzchołkowi v koloru i otrzymalibyśmy poprawne $(k-1)$-kolorowanie grafu G, co być nie może, jako że G jest k-krytyczny. Wynika stąd, że po rozszerzeniu kolorowania b na graf G poprzez przypisanie wierzchołkowi v nowego koloru k otrzymujemy kolorowanie spełniające oba zadane warunki. $\square$