**1.** (10p.) Niech $k \geqslant 1$ i niech $G_1$ oraz $G_2$ będą $k$-spójnymi grafami, takimi że $|V(G_1)|, |V(G_2)| \geqslant k+1$ i $|V(G_1) \cap V(G_2)| \geqslant k$. Pokaż, że $G = (V(G_1) \cup V(G_2), E(G_1) \cup E(G_2))$ również jest $k$-spójny.

*Rozwiązanie.* Zauważmy, że każdy graf $G, G_1, G_2$ ma co najmniej $k+1$ wierzchołków, zatem nie musimy sprawdzać szczególnego przypadku grafów pełnych. Oznaczmy $U = V(G_1) \cap V(G_2)$. Niech $S$ będzie dowolnym podzbiorem $V(G)$, takim że $|S| = k-1$. Wystarczy pokazać, że $G - S$ jest spójny, czyli pomiędzy każdą parą wierzchołków istnieje ścieżka.

Zauważmy, że dla dwóch wierzchołków $x, y \in V(G_1)$ (analogicznie gdy $x, y \in V(G_2)$) zawsze istnieje $x$-$y$ ścieżka w $V(G) - S$. Istotnie, ponieważ $G_1$ jest $k$-spójny, po usunięciu $|V(G_1) \cap S| \leqslant k-1$ wierzchołków z $G_1$ wciąż istnieje $x$-$y$ ścieżka w $G_1 - S$. Ta ścieżka jest również $x$-$y$ ścieżką w $G - S$.

Załóżmy w takim razie, że $x \in V(G_1)$ i $y \in V(G_2)$. Ponieważ $|S| < k$, zbiór $U \setminus S$ jest niepusty, niech $w \in U \setminus S$. Pokazaliśmy powyżej, że istnieją, odpowiednio, $x$-$w$ oraz $w$-$y$ ścieżki $P$ i $Q$ w $G$ (ponieważ $x, w \in V(G_1)$ i $w, y \in V(G_2)$). Z połączenia tych ścieżek powstaje $x$-$y$ spacer w $G$, co oznacza, że istnieje $x$-$y$ ścieżka w $G$. $\square$

**2.** (10p.) Pokaż, że w każdym kolorowaniu krawędzi $K_{6n}$ na czerwono i niebiesko istnieje $n$ wierzchołkowo rozłącznych monochromatycznych trójkątów, których wszystkie $3n$ krawędzi ma ten sam kolor.

*Rozwiązanie.* Indukcja po $n$. Przypadek $n = 1$ wynika z faktu, że $R(3) = 6$ (czyli w każdym kolorowaniu $K_6$ znajdziemy czerwony lub niebieski trójkąt). Załóżmy zatem, że $n \geqslant 2$ i że twierdzenie zachodzi dla $n - 1$. Rozważmy pewne dwukolorowanie krawędzi grafu $G = K_{6n}$.

Niech zbiór $U$ składa się z dowolnych sześciu wierzchołków grafu $G$. Graf $G - U$ jest kliką o $6(n - 1)$ wierzchołkach, więc z założenia indukcyjnego istnieje w nim $n-1$ wierzchołkowo rozłącznych monochromatycznych trójkątów. Bez utraty ogólności załóżmy, że trójkąty są w kolorze czerwonym, i niech $x$, $y$, $z$ będą wierzchołkami jednego z nich.

Graf $G[U]$ jest kliką o sześciu wierzchołkach. Skoro $R(3) = 6$, w $G[U]$ istnieje monochromatyczny trójkąt $uvw$ (wierzchołkowo rozłączny z tymi z $G - U$). Jeśli $uvw$ jest czerwony, to znaleźliśmy $n$ czerwonych wierzchołkowo rozłącznych trójkątów w $G$, co kończy dowód. Załóżmy więc, że $uvw$ jest niebieski. Zauważmy jednak również, że $G' = G - \{x, y, z, u, v, w\}$ jest także kliką o $6(n-1)$ wierzchołkach, więc na mocy założenia indukcyjnego, w $G'$ również istnieje $n - 1$ wierzchołkowo rozłącznych monochromatycznych trójkątów. Jeśli są czerwone, tworzą szukany zbiór $n$ trójkątów razem z trójkątem $xyz$, w przeciwnym razie razem z trójkątem $uvw$ tworzą niebieski zbiór $n$ trójkątów. $\square$

**3.** (10p.) Wykaż, że graf $G = (V, E)$ jest drzewem wtedy i tylko wtedy, gdy jest acykliczny, ale dla każdych dwóch wierzchołków $u, v \in V$ takich, że $u \neq v$ oraz $uv \notin E$ graf $G + uv := (V, E \cup \{uv\})$ zawiera dokładnie jeden cykl.

*Rozwiązanie.* Najpierw załóżmy, że graf $G$ jest drzewem. Wtedy, wprost z definicji drzewa, $G$ jest grafem acyklicznym. Niech $u$ i $v$ będą dowolnymi różnymi i niesąsiadującymi wierzchołkami grafu $G$. Każdy cykl w grafie $G + uv$ zawiera krawędź $uv$, a więc cykli w tym grafie będzie dokładnie tyle, ile jest $uv$-ścieżek w $G$. Ponieważ $G$ jest drzewem, to każde dwa jego wierzchołki są połączone dokładnie jedną ścieżką.

Przyjmijmy teraz, że $G$ jest acykliczny, ale dołożenie do niego jakiejkolwiek krawędzi powoduje powstanie dokładnie jednego cyklu. Chcemy wykazać, że $G$ jest drzewem, a więc wystarczy, że wykażemy, iż jest on grafem spójnym. Przypuśćmy przeciwnie i niech $u$ i $v$ będą wierzchołkami leżącymi w różnych składowych grafu $G$. Wtedy $u \neq v$ oraz $uv \notin E$, ale dołożenie krawędzi $uv$ do grafu $G$ nie powoduje powstania żadnego cyklu, sprzeczność. $\square$

**4.** (10p.) Niech $n \geqslant 3$ będzie liczbą naturalną. Przez $G_n$ oznaczmy graf, którego wierzchołkami są wszystkie dwuelementowe podzbiory zbioru $[n]$, a dwa różne $A, B \in V(G_n)$ są połączone krawędzią wtedy i tylko wtedy, gdy $A \cap B \neq \emptyset$. Sprawdź, dla jakich $n$ graf $G_n$ jest eulerowski.

*Rozwiązanie.* Sprawdzimy najpierw, jakie stopnie mają wierzchołki grafu $G_n$. Rozważmy dowolny zbiór $A = \{a_1, a_2\} \in V(G_n)$. Sąsiadów $A$ w $G_n$ możemy podzielić na dwa typy: (1) zbiory postaci $\{a_1, x\}$, gdzie $x \notin A$, (2) zbiory postaci $\{a_2, y\}$, gdzie $y \notin A$. Zauważmy, że w każdym z typów jest $n-2$ zbiorów oraz żaden zbiór nie jest jednocześnie typu (1) i (2). Zatem stopień dowolnego wierzchołka w $G_n$ jest równy $2n-4$, czyli parzysty dla każdego $n$.

Pozostaje sprawdzić spójność. Weźmy dowolne $A, B \in V(G_n)$ i sprawdźmy, czy istnieje między nimi ścieżka w $G_n$. Jeśli $A \cap B \neq \emptyset$, to już. Załóżmy więc, że $A = \{a_1, a_2\}$ i $B = \{b_1, b_2\}$ są rozłączne. Rozważmy zbiór $C = \{a_1, b_1\}$. Ponieważ $A$ i $B$ były rozłączne, to $C$ jest dwuelementowy, więc $C \in V(G_n)$. Ponadto, $A \cap C \neq \emptyset$ i $B \cap C \neq \emptyset$, więc $A, C, B$ jest ścieżką od $A$ do $B$ w $G_n$.

Pokazaliśmy, że dla każdego $n \geqslant 3$ stopnie w $G_n$ są parzyste oraz $G_n$ spójny, zatem na mocy twierdzenia Eulera graf $G_n$ jest eulerowski dla wszystkich $n \geqslant 3$. $\square$

**5.** (10p.) *Totalnym $k$-kolorowaniem* grafu $G$ nazywamy funkcję $f : V(G) \cup E(G) \to [k]$, która spełnia warunki:

- dla każdej krawędzi $uv \in E(G)$ mamy $f(u) \neq f(v)$ (czyli $f|_{V(G)}$ jest poprawnym kolorowaniem wierzchołkowym),
- dla każdej pary krawędzi $uv, uw \in E(G)$ mamy $f(uv) \neq f(uw)$ (czyli $f|_{E(G)}$ jest poprawnym kolorowaniem krawędziowym),
- dla każdej krawędzi $uv$ mamy $f(u) \neq f(uv)$.

Pokaż, że jeśli $G$ jest drzewem o największym stopniu co najwyżej $\Delta \geqslant 2$, to $G$ ma totalne $(\Delta+1)$-kolorowanie.

*Rozwiązanie.* Indukcja po liczbie wierzchołków grafu $G$. Jeśli $G$ ma jeden wierzchołek, twierdzenie jest oczywiście prawdziwe. Załóżmy zatem, że $|V(G)| \geqslant 2$ i twierdzenie działa dla wszystkich drzew o co najwyżej $|V(G)| - 1$ wierzchołkach. Niech $v$ będzie liściem drzewa $G$, a $u$ jego sąsiadem. Rozważmy drzewo $G - v$. Na mocy założenia indukcyjnego istnieje dla niego totalne $(\Delta + 1)$-kolorowanie $f$. Będziemy chcieli wybrać odpowiednie kolory dla wierzchołka $v$ i krawędzi $uv$, żeby rozszerzyć $f$ na totalne $(\Delta + 1)$-kolorowanie grafu $G$.

Jakie kolory są zablokowane dla krawędzi $uv$? Są to wszystkie kolory występujące na krawędziach incydentnych z $u$ (w $G - v$) oraz kolor samego wierzchołka $u$. W sumie zablokowanych kolorów jest $\deg_{G-v} u + 1 = \deg_G u \leqslant \Delta$. Ponieważ liczba wszystkich kolorów wynosi $\Delta + 1$, istnieje wolny kolor dla krawędzi $uv$. Przypiszmy jej go.

Teraz przeanalizujmy potencjalny kolor dla wierzchołka $v$. Zablokowane są dwa kolory: kolor wierzchołka $u$ i kolor krawędzi $uv$. Ponieważ $\Delta \geqslant 2$, w sumie mamy co najmniej trzy dostępne kolory, więc istnieje wolny kolor dla $v$. Łatwo sprawdzić, że uzyskane w ten sposób kolorowanie jest totalnym $(\Delta + 1)$-kolorowaniem grafu $G$. $\square$