1. (10p.) Niech G będzie grafem r-regularnym, a $X \subseteq V(G)$ będzie takim zbiorem, że $|X|$ jest nieparzyste i liczba krawędzi pomiędzy X i $V(G) \setminus X$ jest mniejsza niż r. Pokaż, że $\chi'(G) = r + 1$.

Rozwiązanie. Z twierdzenia Vizinga wiemy, że $\chi'(G) \leqslant r + 1$, wystarczy więc pokazać, że $\chi'(G) > r$. Przypuśćmy przeciwnie i nich f będzie poprawnym r-kolorowaniem krawędzi grafu G. Ponieważ graf G jest r-regularny, dla każdego wierzchołka v i każdego $c \in [r]$ istnieje krawędź $e(v, c)$ w kolorze c incydentna z v.

Oznaczmy zbiór krawędzi o dokładnie jednym końcu w X przez E'. Ponieważ $|E'| < r$, istnieje kolor c, który w kolorowaniu f nie występuje na żadnej krawędzi z E'. Oznacza to, że dla każdego $x \in X$, drugi koniec krawędzi $e(x, c)$ należy do X. Zatem krawędzie w kolorze c stanowią skojarzenie doskonałe w grafie $G[X]$. Jest to sprzeczność z faktem, że zbiór X ma nieparzystą liczbę wierzchołków. $\square$

2. (10p.) Dla liczby $k \geqslant 1$, przez $G(k)$ oznaczmy graf, którego wierzchołkami są wszystkie k-elementowe podzbiory zbioru $\{1, \dots, 2k+1\}$, zaś dwa zbiory połączone są krawędzią wtedy i tylko wtedy, gdy różnią się dokładnie jednym elementem. Dla jakich k graf $G(k)$ ma obwód Eulera?

Rozwiązanie. Z twierdzenia Eulera wiemy, że graf ma obwód Eulera wtedy i tylko wtedy, gdy jest spójny i każdy jego wierzchołek ma stopień parzysty. Zauważmy, że graf $G(k)$ jest zawsze spójny. Istotnie, rozważmy dwa dowolne różne k-elementowe podzbiory $\{1, \dots, 2k+1\}$, nazwijmy je A i B. Skoro $|A| = |B| = k$, to $|A \setminus B| = |B \setminus A|$. Oznaczmy $A \setminus B = \{a_1, \dots, a_p\}$ i $B \setminus A = \{b_1, \dots, b_p\}$. Wtedy ciąg zbiorów

$$A, A \setminus \{a_1\} \cup \{b_1\}, A, A \setminus \{a_1, a_2\} \cup \{b_1, b_2\}, \dots, A, A \setminus \{a_1, \dots, a_{p-1}\} \cup \{b_1, \dots, b_{p-1}\}, B$$

tworzy w grafie $G(k)$ ścieżkę między A i B.

Teraz rozważmy stopień dowolnego wierzchołka A. Wynosi on $k \cdot (2k+1-k) = k(k+1)$: na k sposobów wybieramy element zbiory A, który usuwamy, a na $(2k+1) - k$ sposobów dodajemy nowy element. Liczba ta jest zawsze parzysta. Podsumowując, dla każdego $k \geqslant 1$ graf $G(k)$ ma obwód Eulera. □

3. (10p.) Niech $n \geqslant 2$. Wyznacz $\chi(\overline{C_{2n+1}})$.

Przypomnijmy, że przez $\overline{G}$ oznaczamy dopełnienie grafu G: $\overline{G} = (V(G), \binom{V(G)}{2} \setminus E(G))$.

Rozwiązanie. Oznaczmy kolejne wierzchołki cyklu C_n przez $v_1, v_2, \dots, v_{2n+1}$, oczywiście są to też wierzchołki grafu $\overline{C_{2n+1}}$. Dla każdego $i \in [2n+1]$ zdefiniujmy $c(v_i) = \lceil \frac{i}{2} \rceil$, czyli wierzchołkom v_1, v_2 przypisujemy kolor 1, wierzchołkom v_3, v_4 kolor 2, itd., wreszcie wierzchołkowi v_{2n+1} przypisujemy kolor $n+1$. Funkcja $c : V(G) \to [n+1]$ jest poprawnym wierzchołkowym k-kolorowaniem grafu G, ponieważ kolor $j \in [n]$ dostają tylko wierzchołki v_{2j-1} oraz v_{2j}, które sąsiadują w C_{2n+1}, a więc nie sąsiadują w $\overline{C_{2n+1}}$, a kolor $n+1$ dostaje tylko wierzchołek v_{2n+1}. Wynika z tego, że $\chi(\overline{C_{2n+1}}) \leqslant n+1$.

Pokażemy, że nie da się pokolorować $\overline{C_{2n+1}}$ na mniej niż $n+1$ kolorów. Przypuśćmy, że istnieje poprawne wierzchołkowe kolorowanie $c' : V(\overline{C_{2n+1}}) \to [k]$ dla $k < n+1$. Oznacza to w szczególności, że istnieje kolor j, który został przypisany przez c' co najmniej $\frac{2n+1}{k}$ wierzchołkom. Zauważmy, że

$$\frac{2n+1}{k} \geqslant \frac{2n+1}{n} > 2,$$

czyli j został przypisany przez c' co najmniej trzem wierzchołkom, niech to będą v_i, v_ℓ oraz v_m. Skoro c' jest poprawnym kolorowaniem, zachodzi $v_i v_m, v_m v_\ell, v_\ell v_i \notin E(\overline{C_{2n+1}})$. Z definicji dopełnienia oznacza to, że C_{2n+1} zawiera trójkąt o wierzchołkach v_i, v_ℓ, v_m, co daje sprzeczność z faktem że C_{2n+1} jest cyklem o co najmniej 5 wierzchołkach.

Skoro znaleźliśmy poprawne kolorowanie $\overline{C_{2n+1}}$ na $n+1$ kolorów, i pokazaliśmy, że do poprawnego pokolorowania $\overline{C_{2n+1}}$ potrzebujemy co najmniej $n+1$ kolorów, wynika z tego, że $\chi(\overline{C_{2n+1}}) = n+1$. □

4. (10p.) Niech $n \geqslant 1$ i niech G będzie grafem dwudzielnym o klasach dwudzielności X, Y takich, że $|X| = |Y| = n$. Pokaż, że G ma skojarzenie doskonałe wtedy i tylko wtedy, gdy nie zawiera zbioru niezależnego rozmiaru co najmniej $n + 1$.

Rozwiązanie. ($\Rightarrow$) Niech M będzie skojarzeniem doskonałym w G, oczywiście $|M| = n$. Niech U będzie dowolnym zbiorem niezależnym w G. Zauważmy, że dla każdej krawędzi z M, zbiór U może zawierać co najwyżej jeden z jej wierzchołków. Ponieważ M pokrywa wszystkie wierzchołki, to $|U| \leqslant n$.

($\Leftarrow$) Przypuśćmy teraz, że G nie ma skojarzenia doskonałego; pokażemy, że ma zbiór niezależny rozmiaru co najmniej $n + 1$. Z warunku Halla wynika, że istnieje $S \subseteq X$ taki, że $|S| > |N(S)|$. Zauważmy, że nie ma żadnych krawędzi z S do $Y \setminus N(S)$ oraz nie ma żadnych krawędzi wewnątrz tych zbiorów. Zatem $S \cup Y \setminus N(S)$ tworzy zbiór niezależny, który zawiera $|Y| + |S| - |N(S)| = n + |S| - |N(S)| \geqslant n + 1$ wierzchołków. $\square$

5. (10p.) Pokaż, że istnieje tylko jedna 4-regularna triangulacja (z dokładnością do izomorfizmu).

Rozwiązanie. Niech G będzie 4-regularną triangulacją. Oznaczmy odpowiednio przez n, m, f liczbę wierzchołków, krawędzi i regionów G.

Zauważmy, że zachodzą następujące zależności:

$$\begin{aligned} 2m =& 4n && \text{(z lematu o uściskach dłoni dla } G) \\ 2m =& 3f && \text{(z lematu o uściskach dłoni dla } G^*) \\ n + f - m =& 2 && \text{(z formuły Eulera).} \end{aligned}$$

Rozwiązując ten układ równań, otrzymujemy, że

$$\begin{aligned} n =& 6 \\ f =& 8 \\ m =& 12. \end{aligned}$$

Teraz przeanalizujmy, jak wygląda G (patrz też rysunek poniżej). Oznaczmy wierzchołki incydentne z zewnętrzną ścianą przez 1, 2, 3; oczywiście indukują one w grafie trójkąt. Poza wierzchołkami 2 i 3, wierzchołek 1 ma jeszcze dwóch sąsiadów, oznaczmy je przez a i b w taki sposób, że analizując krawędzie wychodzące z 1 zgodnie z ruchem wskazówek zegara widzimy kolejno $12, 1a, 1b, 13$. Ponieważ G jest triangulacją, istnieją krawędzie $2a$, ab i $b3$. Ostatni wierzchołek, nazwijmy go c, musi sąsiadować z $2, a, b, 3$, ponieważ ma stopień 4, a te wierzchołki nie mają jeszcze czterech sąsiadów. Jedynym sposobem dodania c na naszym rysunku jest umieszczenie go wewnątrz obszaru wyznaczonego przez cykl $2ab3$. Tak oto w sposób jednoznaczny wyznaczyliśmy graf G. □