

1. (10p.) Niech ϕ będzie poprawnym kolorowaniem grafu G na $k = \chi(G)$ kolorów, a $C_1, \dots, C_k$ zbiorami wierzchołków w odpowiednich kolorach. Niech S będzie największym zbiorem niezależnym w G . Pokaż, że istnieje $i \in [k]$, dla którego $|S \cap C_i| \geq |C_i|/k$.

Rozwiązanie. Przypuśćmy przeciwnie, tj. dla każdego $i \in [k]$ mamy $|S \cap C_i| < |C_i|/k$. Wówczas $|S| = \sum_{i=1}^k |S \cap C_i| < \sum_{i=1}^k |C_i|/k = |V(G)|/k$. Ale wtedy, ponieważ każdy zbiór C_i jest niezależny, a S jest największym zbiorem niezależnym, otrzymujemy $|V(G)| = \sum_{i=1}^k |C_i| \leq \sum_{i=1}^k |S| < k \cdot |V(G)|/k = |V(G)|$, sprzeczność. $\square$

2. (10p.) Dla grafu G przez $G^\bullet$ oznaczmy graf powstały z G poprzez podpodzielenie każdej krawędzi G dokładnie raz. Pokaż, że $G^\bullet$ jest hamiltonowski wtedy i tylko wtedy, gdy G jest cyklem.

Rozwiązanie. Dla krawędzi uv w grafie G , przez x_{uv} oznaczmy wierzchołek w $G^\bullet$, który powstał przy popodpodziale krawędzi uv .

($\Leftarrow$) Załóżmy najpierw, że G jest cyklem i niech $v_1, \dots, v_n$ będą wierzchołkami G takimi, że $v_i v_{i+1} \in E(G)$ dla $i \in [n-1]$ oraz $v_1 v_n \in E(G)$. Cykl Hamiltona w $G^\bullet$ tworzą kolejno wierzchołki:

$$v_1, x_{v_1 v_2}, v_2, x_{v_2 v_3}, v_3, \dots, v_{n-1}, x_{v_{n-1} v_n}, v_n, x_{v_n v_1}.$$

($\Rightarrow$) Załóżmy teraz, że $G^\bullet$ jest hamiltonowski. W szczególności $G^\bullet$ jest spójny, więc G także musi być spójny. Załóżmy nie wprost, że G nie jest cyklem. Wtedy G zawiera wierzchołek v taki, że $\deg_G v \neq 2$. Ponieważ G spójny, to $\deg_G v \geq 1$. Jeśli $\deg_G v = 1$, to w $G^\bullet$ stopień v również jest równy 1 i $G^\bullet$ nie może być hamiltonowski. Czyli musi zachodzić $\deg_G v \geq 3$. Niech u, w, z będą sąsiadami v w G i niech C będzie cyklem Hamiltona w $G^\bullet$. Wierzchołek v ma na C dokładnie dwóch sąsiadów, więc co najmniej jeden z wierzchołków x_{vu}, x_{vw}, x_{vz} nie jest sąsiadem v na C , bez straty ogólności niech to będzie x_{vu} . Z drugiej strony, x_{vu} ma w $G^\bullet$ dokładnie dwóch sąsiadów – u i v – więc oba wierzchołki u, v powinny być sąsiadami x_{vu} na C – sprzeczność, co kończy dowód. $\square$

3. (10p.) Niech G będzie grafem, $e \in E(G)$ będzie mostem w G i niech A, B będą składowymi grafu $G - e$. Pokaż, że jeśli $\chi'(G) = \Delta(G) + 1$, to $\chi'(A) = \Delta(G) + 1$ lub $\chi'(B) = \Delta(G) + 1$.

Rozwiązanie. Załóżmy nie wprost, że $\chi'(A) \neq \Delta(G) + 1$ oraz $\chi'(B) \neq \Delta(G) + 1$. Ponieważ A, B są podgrafami G , to $\chi'(A), \chi'(B) \leq \chi'(G) = \Delta(G) + 1$. Zatem $\chi'(A) \leq \Delta(G)$ oraz $\chi'(B) \leq \Delta(G)$.

Niech $u \in V(A)$, $v \in V(B)$ będą takie, że $e = uv$. Zauważmy, że $\deg_A u = \deg_G u - 1 \leq \Delta(G) - 1$ oraz $\deg_B v = \deg_G v - 1 \leq \Delta(G) - 1$. Bez straty ogólności załóżmy, że $\deg_A u \geq \deg_B v$. Ustalmy krawędziowe $\Delta(G)$ -kolorowanie c_1 grafu A oraz krawędziowe $\Delta(G)$ -kolorowanie c_2 grafu B – oba istnieją, bo $\chi'(A) \leq \Delta(G)$ oraz $\chi'(B) \leq \Delta(G)$. W kolorowaniu c_1 wierzchołek u jest incydentny z $\deg_A u$ kolorami, a w kolorowaniu c_2 wierzchołek v jest incydentny z $\deg_B v \leq \deg_A u$ kolorami – możemy założyć, że każdy z kolorów incydentnych z v jest także incydentny z u , bo w przeciwnym razie możemy odpowiednio pozmienić etykiety kolorów w kolorowaniu c_2 .

Możemy więc zdefiniować krawędziowe $\Delta(G)$ -kolorowanie c grafu G następująco: krawędzie w A kolorujemy zgodnie z c_1 , krawędzie w B kolorujemy zgodnie z c_2 , a krawędź uv kolorujemy kolorem, który nie jest incydentny z żadnym z u, v – przypomnijmy, że w sumie u, v widzą co najwyżej $\Delta(G) - 1$ kolorów, więc będzie kolor wolny dla uv . Sprzeczność z faktem, że $\chi'(G) = \Delta(G) + 1$, co kończy dowód. $\square$

4. (10p.) Niech G, H będą grafami spójnymi, każdy o nieparzystej liczbie wierzchołków. Pokaż, że jeśli $G \square H$ jest eulerowski, to G i H też są eulerowskie.

Przypomnijmy, że dla grafów G i H , ich iloczyn kartezjański $G \square H$ jest zdefiniowany następująco:

$$V(G \square H) = V(G) \times V(H),$$

$$E(G \square H) = \{(v_1, w_1)(v_2, w_2) \mid (v_1 v_2 \in E(G) \wedge w_1 = w_2) \vee (v_1 = v_2 \wedge w_1 w_2 \in E(H))\}.$$

Rozwiązanie. Załóżmy nie wprost, że co najmniej jeden z grafów, bez straty ogólności G , nie jest eulerowski. Ponieważ G jest spójny, to na mocy twierdzenia Eulera w G istnieje wierzchołek u o stopniu nieparzystym.

Przypomnijmy, że z lematu o uściskach dłoni, suma stopni wierzchołków w grafie jest parzysta. Zatem w grafie H , który ma nieparzystą liczbę wierzchołków, musi istnieć co najmniej jeden wierzchołek v o stopniu parzystym.

Rozważmy wierzchołek (u, v) w grafie $G \square H$. Stopień tego wierzchołka wynosi $\deg_{G \square H}(u, v) = \deg_G u + \deg_H v$, co jako suma liczby nieparzystej i parzystej jest liczbą nieparzystą. Czyli graf eulerowski $G \square H$ ma wierzchołek nieparzystego stopnia – sprzeczność na mocy twierdzenia Eulera. $\square$

5. (10p.) Wykaż, że nie istnieje graf płaski taki, że wszystkie jego regiony są sześciokątami (tzn. krawędzie na ich brzegu tworzą cykl C_6) i każde dwa sąsiadujące regiony mają dokładnie jedną wspólną krawędź.

Rozwiązanie. Przypuśćmy przeciwnie i niech G będzie takim grafem. Rozważmy jego graf dualny G^* ; oczywiście jest on planarny. Ponieważ każdy region G jest ograniczony cyklem, G^* nie ma pętli. Ponieważ każde dwa sąsiadujące regiony mają dokładnie jedną wspólną krawędź, G^* nie ma wielokrotnych krawędzi. Jest zatem grafem prostym.

Skoro każdy region w G jest ograniczony przez sześć krawędzi, stopień każdego wierzchołka w G^* wynosi 6. Jest to sprzeczne z własnością, że każdy prosty graf planarny ma wierzchołek stopnia co najwyżej 5. $\square$

Definicje, twierdzenia, wzory.

G jest grafem o zbiorze wierzchołków V i zbiorze krawędzi E . Oznaczamy $n := |V|$ i $m := |E|$. Dla $X \subseteq V$ przez $G[X]$ oznaczamy podgraf G indukowany przez zbiór X , czyli $(X, \{e \in E \mid e \subseteq X\})$.

Spójność.

Def. Graf jest **spójny**, jeśli dla dowolnych dwóch wierzchołków u, v istnieje $u-v$ ścieżka. Graf jest **k -spójny**, jeśli $|G| > k$ i dla każdego $V' \subseteq V$, $|V'| < k$ graf $G - V'$ jest spójny. Graf jest **k -spójny krawędziowo**, jeśli $|E| > 0$ i dla każdego $X \subseteq E$, $|X| < k$ graf $G - X$ jest spójny.

Def. Spójność wierzchołkowa, ozn. $\kappa(G)$ – największe k , dla którego graf jest k -spójny.

Def. Spójność krawędziowa, ozn. $\kappa'(G)$ – największe k , dla którego graf jest krawędziowo k -spójny.

Nierówność Whitneya. $\kappa(G) \leq \kappa'(G) \leq \delta(G)$.

Tw. Menger 1. Dla dowolnych $A, B \subseteq V$, niech k będzie rozmiarem najmniejszego $A-B$ -separatora. W G istnieje k rozłącznych $A-B$ ścieżek.

Tw. Menger 2. Graf G jest k -spójny wtw. gdy dla każdej pary wierzchołków u, v istnieje k wewnętrznich rozłącznych $u-v$ ścieżek.

Tw. Menger 3. Graf G jest k -spójny wtw. gdy dla każdego $x \in V$ i $U \subseteq V \setminus \{x\}$, $|U| = k$, istnieje $x-U$ -wachlarz, czyli k wew. rozłącznych ścieżek o początku w x i końcach w różnych wierzchołkach z U .

Tw. Menger 4. Graf G jest k -spójny krawędziowo wtw. gdy dla każdej pary wierzchołków u, v istnieje k krawędziowo rozłącznych $u-v$ ścieżek.

Obwód Eulera.

Tw. Eulera (wersja z obwodem). Multigraf spójny ma obwód Eulera wtw. gdy każdy wierzchołek ma stopień parzysty.

Tw. Eulera (wersja z drogą). Multigraf spójny ma drogę Eulera wtw. gdy liczba wierzchołków stopnia nieparzystego jest mniejsza lub równa 2.

Cykl Hamiltona.

Warunek konieczny. Jeśli G ma cykl Hamiltona, to dla każdego $S \subseteq V$, $S \neq \emptyset$ graf $G - S$ ma co najwyżej $|S|$ spójnych składowych.

Tw. Diraca (warunek dostateczny). Jeśli G jest prosty i $n \geq 3$ oraz dla każdego $v \in V$ zachodzi $\deg(v) \geq \frac{n}{2}$, to G jest hamiltonowski.

Tw. Ore'go (warunek dostateczny). Jeśli G jest prosty i $n \geq 3$ oraz dla każdych u, v takich, że $uv \notin E$, zachodzi $\deg(u) + \deg(v) \geq n$, to G jest hamiltonowski.

Kolorowanie krawędzi.

Tw. Vizinga. $\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$.

Kolorowanie wierzchołków.

Def. Zbiór niezależny – zbiór wierzchołków takich, że żadne dwa nie są połączone krawędzią.

Def. Graf G jest **krytyczny**, jeśli dla każdego jego właściwego podgrafu H zachodzi $\chi(H) < \chi(G)$. Graf jest **k -krytyczny**, jeśli jest krytyczny i $\chi(G) = k$.

Lemat. Jeśli G jest k -krytyczny, to $\delta(G) \geq k - 1$.

Tw. $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$ (algorytm zachłanny).

Tw. Brooksa Jeśli graf spójny G nie jest nieparzystym cyklem ani grafem pełnym, to $\chi(G) \leq \Delta(G)$.

Tw. Mycielskiego. Dla każdego k istnieje graf G_k bez trójkątów taki, że $\chi(G_k) = k$.

Def. Talią grafu nazywamy długość najkrótszego cyklu w tym grafie.

Tw. Erdősa Dla dowolnych $k, \ell \in \mathbb{N}$ istnieje graf G taki, że $\chi(G) \geq k$ i talia grafu G jest co najmniej ℓ .

Skojarzenia.

Def. **Skojarzeniem** nazywamy zbiór rozłącznych krawędzi grafu. Skojarzeniem **maksymalnym** nazywamy skojarzenie, które nie jest podzbiorem żadnego innego skojarzenia. Skojarzeniem **doskonałym** nazywamy skojarzenie, które pokrywa każdy wierzchołek.

Def. Ścieżką naprzemienną względem skojarzenia M nazywamy ścieżkę, której krawędzie na przemian należą i nie należą do M . Ścieżka jest **powiększająca** względem skojarzenia M , jeśli jest naprzemienna względem M oraz zaczyna i kończy się w wierzchołku niepokrytym przez M .

Tw. Berge'a. Skojarzenie M jest największe wtw, gdy nie ma ścieżki

powiększającej względem M .

Tw. Halla. Niech G będzie grafem dwudzielnym o klasach dwudzielności X, Y . W G istnieje skojarzenie pokrywające X wtw, gdy dla każdego $X' \subseteq X$ zachodzi $|N(X')| \geq |X'|$.

Sieci i przepływy.

Niech $N = (G, c, s, t)$ będzie siecią, $G = (V, A)$. Dla funkcji $f : A \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ definiujemy:

- Dla $v \in V$: $f^+(v) := \sum_{u:vu \in A} f(vu)$ i $f^-(v) := \sum_{u:uv \in A} f(uv)$
- Dla $S \subseteq V$: $f^+(S) := \sum_{\substack{uv \in A \\ u \in S, v \notin S}} f(uv)$ i $f^-(S) := \sum_{\substack{vu \in A \\ u \in S, v \notin S}} f(vu)$

Def. Funkcję $f : A \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ nazywamy **przepływem**, jeśli dla każdego $a \in A$ zachodzi $f(a) \leq c(a)$ oraz dla każdego $v \in V \setminus \{s, t\}$ zachodzi $f^+(v) = f^-(v)$.

Def. Wartość przepływu f to $\text{val } f := f^+(s) - f^-(s)$.

Fakt. $f^+(s) - f^-(s) = f^-(t) - f^+(t)$.

Def. Dla dowolnego $S \subseteq V$ takiego, że $s \in S$ i $t \in \bar{S} := V \setminus S$, **przekrojem** $(S, \bar{S})$ nazywamy zbiór krawędzi o początku w S i końcu w $\bar{S}$. **Przepustowością** przekroju $K = (S, \bar{S})$ nazywamy $\text{cap } K := \sum_{a \in K} c(a)$.

Lemat. Dla dowolnego przepływu f i dowolnego przekroju $(S, \bar{S})$ zachodzi $\text{val } f = f^+(S) - f^-(S)$.

Tw. Dla dowolnego przepływu f i dowolnego przekroju K zachodzi $\text{val } f \leq \text{cap } K$. Jeśli $\text{val } f = \text{cap } K$, to f jest największym przepływem, a K najmniejszym przekrojem.

Def. Dla ścieżki P (niekoniecznie skierowanej), przepływu f i łuku a z P definiujemy:

$$r(a) = \begin{cases} c(a) - f(a) & \text{jeśli } a \text{ jest krawędzią w przód,} \\ f(a) & \text{jeśli } a \text{ jest krawędzią w tył.} \end{cases}$$

Dla ścieżki P definiujemy $r(P) := \min_{a \in \text{łuk } P} r(a)$.

Ścieżka P jest **powiększająca** jeśli jest $s-t$ ścieżką i $r(P) > 0$. Wówczas można zdefiniować przepływ $\hat{f}(a)$ jako:

$$\hat{f}(a) = \begin{cases} f(a) + r(P), & \text{jeśli } a \in A(P) \text{ jest łukiem w przód,} \\ f(a) - r(P), & \text{jeśli } a \in A(P) \text{ jest łukiem w tył} \\ f(a), & \text{jeśli } a \notin A(P). \end{cases}$$

Tw. Forda-Fulkersona. Przepływ f jest największy wtw. gdy nie ma ścieżki powiększającej.

Wniosek Jeśli f^* jest największym przepływem, a $\tilde{K}$ najmniejszym przekrojem, to $\text{cap } \tilde{K} = \text{val } f^*$.

Planarność.

Tw. Kuratowskiego. Graf G jest planarny wtw. gdy nie zawiera podpodziału $K_{3,3}$ lub K_5 .

Tw. Dla grafu płaskiego G zachodzi $\sum_{f \in F(G)} \deg_G f = 2m$, gdzie przez $F(G)$ oznaczamy zbiór regionów (ścian) grafu płaskiego G .

Formuła Eulera. Dla spójnego grafu płaskiego G zachodzi $n - m + |F(G)| = 2$.

Lemat. Dla prostego grafu planarnego G o $n \geq 3$ wierzchołkach i talii k zachodzi $m \leq k(n-2)/(k-2)$.

Wniosek. Dla prostego grafu planarnego G o $n \geq 3$ wierzchołkach zachodzi $m \leq 3n - 6$.

Wniosek. Każdy graf planarny ma wierzchołek stopnia co najwyżej 5.

Tw. o czterech kolorach. Jeśli G jest planarny, to $\chi(G) \leq 4$.

Def. Dla grafu płaskiego G , jego **grafem dualnym** G^* nazywamy graf, którego wierzchołkami są regiony G i istnieje bijekcja między $E(G^*)$ a $E(G)$: krawędź e^* łączy dwa wierzchołki f_1, f_2 w G^* wtw, gdy odpowiadająca jej krawędź e z G jest incydentna z f_1 i f_2 .

Teoria Ramseya.

Def. Liczba Ramseya, ozn. $R(t)$, to najmniejsze n takie, że przy dowolnym dwukolorowaniu krawędzi K_n znajdziemy jednokolorową kopię K_t .

Przez $R(t_1, t_2, \dots, t_k)$ oznaczamy najmniejsze n takie, że przy dowolnym kolorowaniu K_n na k kolorów znajdziemy kopię K_{t_1} w pierwszym kolorze, K_{t_2} w drugim kolorze, ... lub K_{t_k} w k -tym kolorze.

Tw. Ramseya (Erdősa-Szekeres). Dla każdego t zachodzi $R(t) \leq 4^t$.

Tw. Erdősa. Dla $t \geq 3$ zachodzi $R(t) > 2^{t/2}$.

Tw. Dla $s, t > 1$ zachodzi $R(s, t) \leq R(s, t-1) + R(s-1, t)$.

Wniosek. Dla $s, t \geq 1$ zachodzi $R(s, t) \leq \binom{s+t-2}{s-1} = \binom{s+t-2}{t-1}$.