1. (10p.) Niech F będzie grafem posiadającym xy-ścieżkę Hamiltona dla pewnych $x, y \in V(F)$. Niech F_1, F_2 i F_3 będą wierzchołkowo rozłącznymi kopiami grafu F, gdzie x_i i y_i odpowiadają wierzchołkom x i y w kopii F_i dla $i \in [3]$. Niech $\{a, b, c\}$ będzie zbiorem wierzchołków rozłącznym z $V(F_1) \cup V(F_2) \cup V(F_3)$. W końcu niech G będzie grafem zdefiniowanym następująco:

$$\begin{aligned} V(G) =& V(F_1) \cup V(F_2) \cup V(F_3) \cup \{a, b, c\} \\ E(G) =& E(F_1) \cup E(F_2) \cup E(F_3) \cup \{ax_1, ay_3, bx_2, by_1, cx_3, cy_2\}. \end{aligned}$$

Zbadaj, kiedy graf G ma cykl Hamiltona.

Rozwiązanie. Niech P_i będzie xy-ścieżką Hamiltona w F_i dla $i \in [3]$. Zauważmy, że

$$ax_1P_1y_1bx_2P_2y_2cx_3P_3y_3a$$

jest cyklem Hamiltona w G. Zatem G jest zawsze hamiltonowski. $\square$

2 (10p.) Udowodnij, że każdy graf planarny, w którym każdy wierzchołek na stopień co najmniej 5, zawiera trójkąt.

Rozwiązanie. Rozważmy graf planarny, w którym każdy wierzchołek na stopień co najmniej 5 i przypuśćmy, że nie ma trójkątów, czyli jego talia wynosi $k \geqslant 4$. Niech n oznacza jego liczbę wierzchołków, a m krawędzi. Ponieważ graf jest planarny i ma talię $k \geqslant 4$, mamy $m \leqslant k(n-2)(k-2) = 2n-4$. Z kolei z lematu o uściskach dłoni otrzymujemy $m \geqslant 5n/2$. Łącząc te dwie nierówności otrzymujemy sprzeczność. $\square$

3. (10p.) Pokaż, że jeśli G jest spójnym grafem o co najmniej trzech wierzchołkach, to G^2 jest 2-spójny. Przypomnijmy, że graf G^2 ma te same wierzchołki, co G, a krawędzie łączą pary wierzchołków, które w G są w odległości co najwyżej 2.

Rozwiązanie. Przypuśćmy przeciwnie i niech G będzie kontrprzykładem. Skoro G^2 ma co najmniej trzy wierzchołki i nie jest 2-spójny, a jest spójny (bo ma wszystkie krawędzie z G), musi mieć wierzchołek rozcinający x. Niech a, b będą sąsiadami x w różnych składowych grafu $G^2 - x$; takie wierzchołki muszą istnieć, skoro G^2 jest spójny. Wierzchołki a, b są w odległości 2 w G, czyli $ab \in E(G^2)$, sprzeczność. $\square$

4. (10p.) Pokaż, że każdy graf G o co najmniej jednej krawędzi ma skojarzenie rozmiaru większego niż $\frac{|E(G)|}{2\Delta(G)}$.

Rozwiązanie. Zainicjalizujmy $M = \emptyset$ i rozważmy następującą iteracyjną procedurę. Jeśli graf nie ma krawędzi, kończymy proces i zwracamy zbiór M. W przeciwnym przypadku wybieramy dowolną krawędź xy i dodajemy ją do zbioru M. Następnie usuwamy z grafu wszystkie krawędzie incydentne z x i y i przechodzimy do kolejnej iteracji.

Zauważmy, że M jest zbiorem krawędzi, a usuwanie krawędzi incydentnych z x i y gwarantuje, że jest skojarzeniem. Rozważmy jego rozmiar. W każdej iteracji usuwamy co najwyżej $2\Delta(G)-1 < 2\Delta(G)$ krawędzi z grafu. Zatem, zanim wykorzystamy wszystkie krawędzie, wykonamy więcej niż $|E(G)|/2\Delta(G)$ iteracji. Inaczej mówiąc, $|M| > \frac{E(G)|}{2\Delta(G)}$. □

5. (10p.) Wyznacz $\chi(L(Q_n))$.

Przypomnienie:

- Dla grafu G, graf krawędziowy $L(G)$ to graf o zbiorze wierzchołków $V(L(G)) = E(G)$ oraz $ef \in E(L(G))$, gdy e i f mają wspólny wierzchołek w G.
- Kostką n-wymiarową nazywamy graf Q_n, którego wierzchołkami są wszystkie zerojedynkowe ciągi n-elementowe, a krawędź między dwoma ciągami istnieje wtedy, gdy ciągi te różnią się na dokładnie jednej współrzędnej.

Rozwiązanie 1. Wiadomo, że $\chi(L(G)) = \chi'(G)$ dla dowolnego grafu G. Kolorujemy krawędzie Q_n następująco: krawędź uv otrzymuje kolor i, jeśli ciągi u i v różnią się na i-tej współrzędnej. Z definicji grafu Q_n, dwa różne ciągi v_1 i v_2 nie mogą się różnić od u na dokładnie jednej, tej samej współrzędnej (bo wszystkie ciągi są zerojedynkowe). Zatem, ustalone kolorowanie jest poprawne, skąd mamy, że $\chi'(Q_n) \leqslant n$. Wiemy też, że $\chi'(Q_n) \geqslant \Delta(Q_n) = n$, zatem $\chi(L(Q_n)) = \chi'(Q_n) = n$. □

Rozwiązanie 2. Wiadomo, że $\chi(L(G)) = \chi'(G)$ dla dowolnego grafu G. Z zadania 5.5 z ćwiczeń wiemy, że $\chi(Q_n) = 2$, zatem Q_n to graf dwudzielny. Na mocy twierdzenia Königa (zadanie 6.4) otrzymujemy, że $\chi'(Q_n) = \Delta(Q_n)$. Nietrudno można przekonać się, że $\Delta(Q_n) = n$. Zatem, $\chi(L(Q_n)) = n$. □

Definicje, twierdzenia, wzory.

G jest grafem o zbiorze wierzchołków V i zbiorze krawędzi E. Oznaczamy $n := |V|$ i $m := |E|$. Dla $X \subseteq V$ przez $G[X]$ oznaczamy podgraf G indukowany przez zbiór X, czyli $(X, \{e \in E \mid e \subseteq X\})$.

Spójność.

Def. Graf jest **spójny**, jeśli dla dowolnych dwóch wierzchołków u, v istnieje u-v-ścieżka. Graf jest **k-spójny**, jeśli $|G| > k$ i dla każdego $V' \subseteq V$, $|V'| < k$ graf $G - V'$ jest spójny. Graf jest **k-spójny krawędziowo**, jeśli $|E| > 0$ i dla każdego $X \subseteq E$, $|X| < k$ graf $G - X$ jest spójny.
Def. Spójność wierzchołkowa, ozn. $\kappa(G)$ – największe k, dla którego graf jest k-spójny.
Def. Spójność krawędziowa, ozn. $\kappa'(G)$ – największe k, dla którego graf jest krawędziowo k-spójny.
Nierówność Whitneya. $\kappa(G) \leqslant \kappa'(G) \leqslant \delta(G)$.
Tw. Mengera 1. Dla dowolnych $A, B \subseteq V$, niech k będzie rozmiarem najmniejszego A-B-separatora. W G istnieje k rozłącznych $A - B$ ścieżek.
Tw. Mengera 2. Graf G jest k-spójny wtw. gdy dla każdej pary wierzchołków u, v istnieje k wewnętrznie rozłącznych u-v ścieżek.
Tw. Mengera 3. Graf G jest k-spójny wtw. gdy dla każdego $x \in V$ i $U \in V \setminus \{x\}$, $|U| = k$, istnieje x-U-wachlarz, czyli k wew. rozłącznych ścieżek o początku w x i końcach w różnych wierzchołkach z U.
Tw. Mengera 4. Graf G jest k-spójny krawędziowo wtw. gdy dla każdej pary wierzchołków u, v istnieje k krawędziowo rozłącznych u-v ścieżek.

Obwód Eulera.

Tw. Eulera (wersja z obwodem). Multigraf spójny ma obwód Eulera wtw. gdy każdy wierzchołek ma stopień parzysty.
Tw. Eulera (wersja z drogą). Multigraf spójny ma drogę Eulera wtw. gdy liczba wierzchołków stopnia nieparzystego jest mniejsza lub równa 2.

Cykl Hamiltona.

Warunek konieczny. Jeśli G ma cykl Hamiltona, to dla każdego $S \subseteq V$, $S \neq \emptyset$ graf $G - S$ ma co najwyżej $|S|$ spójnych składowych.
Tw. Diraca (warunek dostateczny). Jeśli G jest prosty i $n \geqslant 3$ oraz dla każdego $v \in V$ zachodzi $\deg(v) \geqslant \frac{n}{2}$, to G jest hamiltonowski.
Tw. Orego (warunek dostateczny). Jeśli G jest prosty i $n \geqslant 3$ oraz dla każdych u, v takich, że $uv \notin E$, zachodzi $\deg(u) + \deg(v) \geqslant n$, to G jest hamiltonowski.

Kolorowanie krawędzi.

Tw. Vizinga. $\Delta(G) \leqslant \chi'(G) \leqslant \Delta(G) + 1$.

Kolorowanie wierzchołków.

Def. Zbiór niezależny – zbiór wierzchołków takich, że żadne dwa nie są połączone krawędzią.
Def. Graf G jest **krytyczny**, jeśli dla każdego jego właściwego podgrafu H zachodzi $\chi(H) < \chi(G)$. Graf jest **k-krytyczny**, jeśli jest krytyczny i $\chi(G) = k$.
Lemat. Jeśli G jest k-krytyczny, to $\delta(G) \geqslant k - 1$.
Tw. $\chi(G) \leqslant \Delta(G) + 1$ (algorytm zachłanny).
Tw. Brooksa Jeśli graf spójny G nie jest nieparzystym cyklem ani grafem pełnym, to $\chi(G) \leqslant \Delta(G)$.
Tw Mycielskiego. Dla każdego k istnieje graf G_k bez trójkątów taki, że $\chi(G_k) = k$.
Def. Talią grafu nazywamy długość najkrótszego cyklu w tym grafie.
Tw. Erdősa Dla dowolnych $k, \ell \in \mathbb{N}$ istnieje graf G taki, że $\chi(G) \geqslant k$ i talia grafu G jest co najmniej ℓ.

Skojarzenia.

Def. **Skojarzeniem** nazywamy zbiór rozłącznych krawędzi grafu. Skojarzeniem **maksymalnym** nazywamy skojarzenie, które nie jest podzbiorem żadnego innego skojarzenia. Skojarzeniem **doskonałym** nazywamy skojarzenie, które pokrywa każdy wierzchołek.
Def. **Ścieżką naprzemienną** względem skojarzenia M nazywamy ścieżkę, której krawędzie na przemian należą i nie należą do M. Ścieżka jest **powiększająca** względem skojarzenia M, jeśli jest naprzemienna względem M oraz zaczyna i kończy się w wierzchołku niepokrytym przez M.
Tw. Berge'a. Skojarzenie M jest największe wtw, gdy nie ma ścieżki powiększającej względem M.
Tw. Halla. Niech G będzie grafem dwudzielnym o klasach dwudzielności X, Y. W G istnieje skojarzenie pokrywające X wtw, gdy dla każdego $X' \subseteq X$ zachodzi $|N(X')| \geqslant |X'|$.

Sieci i przepływy.

Niech $N = (G, c, s, t)$ będzie siecią, $G = (V, A)$. Dla funkcji $f : A \to \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ definiujemy:

- Dla $v \in V$: $f^+(v) := \sum_{u: vu \in A} f(vu)$ i $f^-(v) := \sum_{u: uv \in A} f(uv)$
- Dla $S \subseteq V$: $f^+(S) := \sum_{\substack{uv \in A \\ u \in S \\ v \notin S}} f(uv)$ i $f^-(S) := \sum_{\substack{vu \in A \\ u \in S \\ v \notin S}} f(vu)$

Def. Funkcję $f : A \to \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ nazywamy **przepływem**, jeśli dla każdego $a \in A$ zachodzi $f(a) \leqslant c(a)$ oraz dla każdego $v \in V \setminus \{s, t\}$ zachodzi $f^+(v) = f^-(v)$.
Def. Wartość przepływu f to $\operatorname{val} f := f^+(s) - f^-(s)$.
Fakt. $f^+(s) - f^-(s) = f^-(t) - f^+(t)$.
Def. Dla dowolnego $S \subseteq V$ takiego, że $s \in S$ i $t \in \overline{S} := V \setminus S$, **przekrojem** $(S, \overline{S})$ nazywamy zbiór krawędzi o początku w S i końcu w $\overline{S}$. **Przepustowością** przekroju $K = (S, \overline{S})$ nazywamy $\operatorname{cap} K := \sum_{a \in K} c(a)$.
Lemat. Dla dowolnego przepływu f i dowolnego przekroju $\left(S, \overline{S}\right)$ zachodzi $\operatorname{val} f = f^+(S) - f^-(S)$.
Tw. Dla dowolnego przepływu f i dowolnego przekroju K zachodzi $\operatorname{val} f \leqslant \operatorname{cap} K$. Jeśli $\operatorname{val} f = \operatorname{cap} K$, to f jest największym przepływem, a K najmniejszym przekrojem.
Def. Dla ścieżki P (niekoniecznie skierowanej), przepływu f i łuku a z P definujemy:

$$r(a) = \begin{cases} c(a) - f(a) & \text{jeśli } a \text{ jest krawędzią w przód,} \\ f(a) & \text{jeśli } a \text{ jest krawędzią w tył.} \end{cases}$$

Dla ścieżki P definiujemy $r(P) := \min_{a \text{ - łuk } P} r(a)$.

Ścieżka P jest **powiększająca** jeśli jest s-t ścieżką i $r(P) > 0$. Wówczas można zdefiniować przepływ $\hat{f}(a)$ jako:

$$\hat{f}(a) = \begin{cases} f(a) + r(P), & \text{jeśli } a \in A(P) \text{ jest łukiem w przód,} \\ f(a) - r(P), & \text{jeśli } a \in A(P) \text{ jest łukiem w tył} \\ f(a), & \text{jeśli } a \notin A(P). \end{cases}$$

Tw. Forda-Fulkersona. Przepływ f jest największy wtw. gdy nie ma ścieżki powiększającej.
Wniosek Jeśli f^* jest największym przepływem, a $\widetilde{K}$ najmniejszym przekrojem, to $\operatorname{cap} \widetilde{K} = \operatorname{val} f^*$.

Planarność.

Tw. Kuratowskiego. Graf G jest planarny wtw. gdy nie zawiera podpodziału $K_{3,3}$ lub K_5.
Tw. Dla grafu płaskiego G zachodzi $\sum_{f \in F(G)} \deg_G f = 2m$, gdzie przez $F(G)$ oznaczamy zbiór regionów (ścian) grafu płaskiego G.
Formuła Eulera. Dla spójnego grafu płaskiego G zachodzi $n - m + |F(G)| = 2$.
Lemat. Dla prostego grafu planarnego G o $n \geqslant 3$ wierzchołkach i talii k zachodzi $m \leqslant k(n-2)/(k-2)$.
Wniosek. Dla prostego grafu planarnego G o $n \geqslant 3$ wierzchołkach zachodzi $m \leqslant 3n - 6$.
Wniosek. Każdy graf planarny ma wierzchołek stopnia co najwyżej 5.
Tw. o czterech kolorach. Jeśli G jest planarny, to $\chi(G) \leqslant 4$.
Def. Dla grafu płaskiego G, jego **grafem dualnym** G^* nazywamy graf, którego wierzchołkami są regiony G i istnieje bijekcja między $E(G^*)$ a $E(G)$: krawędź e^* łączy dwa wierzchołki f_1, f_2 w G^* wtw, gdy odpowiadająca jej krawędź e z G jest incydentna z f_1 i f_2.

Teoria Ramseya.

Def. Liczba Ramseya, ozn. $R(t)$, to najmniejsze n takie, że przy dowolnym dwukolorowaniu krawędzi K_n znajdziemy jednokolorową kopię K_t.
Przez $R(t_1, t_2, \ldots, t_k)$ oznaczamy najmniejsze n takie, że przy dowolnym kolorowaniu K_n na k kolorów znajdziemy kopię K_{t_1} w pierwszym kolorze, K_{t_2} w drugim kolorze, ... lub K_{t_k} w k-tym kolorze.
Tw. Ramseya (Erdősa-Szekeresa). Dla każdego t zachodzi $R(t) \leqslant 4^t$.
Tw. Erdősa. Dla $t \geqslant 3$ zachodzi $R(t) > 2^{t/2}$.
Tw. Dla $s, t > 1$ zachodzi $R(s,t) \leqslant R(s, t-1) + R(s-1, t)$.
Wniosek. Dla $s, t \geqslant 1$ zachodzi $R(s,t) \leqslant \binom{s+t-2}{s-1} = \binom{s+t-2}{t-1}$.