Zad. 1	**Zad. 2**	**Zad. 3**	**Zad. 4**	**Zad. 5**	**SUMA**

1. (10p.) Niech $X(n,k)$ będzie zbiorem grafów, które mają dokładnie n wierzchołków i dokładnie k składowych. Wyznacz liczby $\min\{|E| : (V,E) \in X(n,k)\}$ oraz $\max\{|E| : (V,E) \in X(n,k)\}$.

Rozwiązanie. Najpierw zajmijmy się minimum. Zauważmy, że jeśli graf $G \in X(n,k)$ ma składową, która nie jest drzewem, to nie może realizować szukanego minimum – rzeczywiście, składowa taka musi zawierać cykl (bo jest spójna), jeśli e jest dowolną krawędzią takiego cyklu, to $G - e \in X(n,k)$ i ma mniej krawędzi niż G. Przypuśćmy, że G ma wszystkie składowe $G_1, \ldots, G_k$ będące drzewami oraz $n_i := |V(G_i)|$. Wtedy

$$|E(G)| = \sum_{i=1}^{k} |E(G_i)| = \sum_{i=1}^{k} (|V(G_i)| - 1) = \sum_{i=1}^{k} n_i - k = n - k.$$

Oznacza to, że każdy spośród grafów, które rozważamy ma taką samą liczbę krawędzi i to ona jest szukanym minimum.

Przejdźmy teraz do maksimum. Przede wszystkim zauważamy, że graf realizujący maksimum musi mieć wszystkie składowe będące grafami pełnymi. Który spośród nich ma najwięcej krawędzi? Załóżmy, że dwie spośród tych składowych mają krawędzie, czyli $G = K_j + K_k + H$, gdzie $k \geqslant j > 1$, a H jest grafem złożonym z pozostałych składowych grafu G. Wtedy graf $G' := K_{j-1} + K_{k+1} + H$ należy do $X(n,k)$ oraz ma więcej krawędzi niż G, gdyż

$$\begin{aligned} |E(G')| - |E(G)| &= \binom{j-1}{2} + \binom{k+1}{2} - \binom{j}{2} - \binom{k}{2} \\ &= \frac{(j-1)(j-2)}{2} + \frac{(k+1)k}{2} - \frac{(j-1)j}{2} - \frac{(k-1)k}{2} = \\ &= \frac{(j-1)(-2)}{2} + \frac{k \cdot 2}{2} = k - j + 1 > 0. \end{aligned}$$

To oznacza, że graf realizujący maksimum musi mieć co najwyżej jedną składową zawierającą krawędzie – spośród rozważanych grafów istnieje taki jeden, a mianowicie $K_{n-k+1} + (k-1)K_1$, który ma $\binom{n-k+1}{2}$ krawędzi.

2. (10p.) Niech $n > 1$, niech $V := \{A : A \subseteq \{1, \dots, n\}\}$. Zdefiniujmy graf $G = (V, E)$, gdzie

$$E := \{AB : A \subset B \vee B \subset A\}.$$

Zbadaj dla jakich n graf G ma obwód Eulera, a dla jakich drogę Eulera.

Rozwiązanie. Rozważmy dowolny $A \in V$, czyli podzbiór zbioru $\{1, \dots, n\}$. Wyznaczymy $\deg_G(A)$. Z definicji grafu G wynika, że A ma dwa rodzaje sąsiadów – te wierzchołki, które zawierają się w A jako podzbiory zbioru $\{1, \dots, n\}$ oraz te wierzchołki, które zawierają A jako podzbiory zbioru $\{1, \dots, n\}$. Jeśli oznaczymy $k := |A|$, to tych pierwszych sąsiadów jest $2^k - 1$, gdzie -1 wynika stąd, że A nie sąsiaduje sam ze sobą, natomiast tych drugich sąsiadów jest $2^{n-k} - 1$. Podsumowując $\deg_G(A) = 2^k + 2^{n-k} - 2$. Liczba ta jest parzysta, chyba że $k = 0$ lub $k = n$, gdy jest nieparzysta. Niemniej $k = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $A = \emptyset$, a $k = n$ wtedy i tylko wtedy, gdy $A = \{1, \dots, n\}$. Oznacza to, że dokładnie dwa wierzchołki grafu G mają nieparzysty stopień. Dlatego też graf ten nigdy nie ma obwodu Eulera. Jeśli jest spójny, to ma za to drogę Eulera. I rzeczywiście jest spójny. Weźmy dowolne $A, B \in V$. Jeśli któryś z nich jest zbiorem pustym, to w oczywisty sposób $AB \in E$. Jeśli żaden z nich nie jest pusty, to $A\emptyset B$ jest ścieżką długości 2 w G. Tym samym G jest spójny.

3. (10p.) Niech $G = (V, E)$ będzie grafem krytycznym, a S dowolnym zbiorem niezależnym w G. Pokaż, że $\chi(G - S) = \chi(G) - 1$. Przez $G - S$ oznaczmy podgraf G indukowany przez zbiór wierzchołków $V \setminus S$.

Rozwiązanie. Ponieważ G jest krytyczny, a $G - S$ jest podgrafem G, otrzymujemy, że $\chi(G - S) \leq \chi(G) - 1$.

Pokażemy teraz nierówność w drugą stronę. Przypuśćmy, że $\chi(G - S) = k < \chi(G) - 1$ i rozważmy poprawne k-kolorowanie grafu $G - S$. Kolorowanie to można rozszerzyć na kolorowanie całego grafu G, nadając wierzchołkom z S kolor $k+1$. Zauważmy, że jest to poprawne $(k+1)$-kolorowanie G, ponieważ S jest niezależny. Zatem $\chi(G) \leq k + 1 < \chi(G)$, sprzeczność.

4. (10p.) Niech $k \geq 1$ i niech T będzie dowolnym drzewem o k wierzchołkach. Pokaż, że w każdym kolorowaniu krawędzi grafu K_{k+1} na czerwono i niebiesko istnieje czerwona gwiazda o 2 liściach (inaczej mówiąc, ścieżka o trzech wierzchołkach) lub niebieska kopia T.

Rozwiązanie. Przypuśćmy, że w grafie nie ma czerwonej gwiazdy $K_{1,2}$, pokażemy, że jest w nim niebieska kopia T. Zauważmy, że skoro nie ma czerwonej gwiazdy $K_{1,2}$, to każdy wierzchołek jest incydentny z co najwyżej jedną czerwoną krawędzią. Zatem każdy wierzchołek jest incydentny z co najmniej $(k+1)-1-1 = k-1$ niebieskimi krawędziami.

Niech G będzie grafem powstałym z K_{k+1} przez usunięcie czerwonych krawędzi, z rozumowania powyżej wynika, że $\delta(G) \geq k-1$.

Pozostało pokazać następujący fakt: dla każdego $k \geq 1$, jeśli T jest drzewem o k wierzchołkach, a G jest grafem o minimalnym stopniu co najmniej $k-1$, to T jest podgrafem G. Pokażemy to przez indukcję po k.

Jeśli $k = 1$, to T jest grafem jednowierzchołkowym, zatem oczywiście jest podgrafem G. Przypuśćmy zatem, że $k \geq 2$ i że stwierdzenie jest prawdziwe dla $k-1$.

Ponieważ T jest drzewem o co najmniej dwóch wierzchołkach, istnieje w nim wierzchołek v stopnia 1. Niech w będzie sąsiadem wierzchołka v i niech T' będzie grafem otrzymanym z T przez usunięcie wierzchołka v. Ponieważ $\delta(G) \geq k-1 \geq (k-1)-1$, z założenia indukcyjnego wiemy, że T' jest podgrafem G. Przyjrzyjmy się wierzchołkowi w w G. Zauważmy, że $|V(T') \setminus \{w\}| = k-2$ zatem spośród co najmniej $k-1$ sąsiadów w istnieje wierzchołek v', któremu nie przypisano żadnego wierzchołka T'. Dodając do T' wierzchołek v' i krawędź wv', znajdujemy w nim kopię T.

Udało nam się zatem znaleźć kopię T w grafie G, czyli, inaczej mówiąc, niebieską kopię T w K_{k+1}.

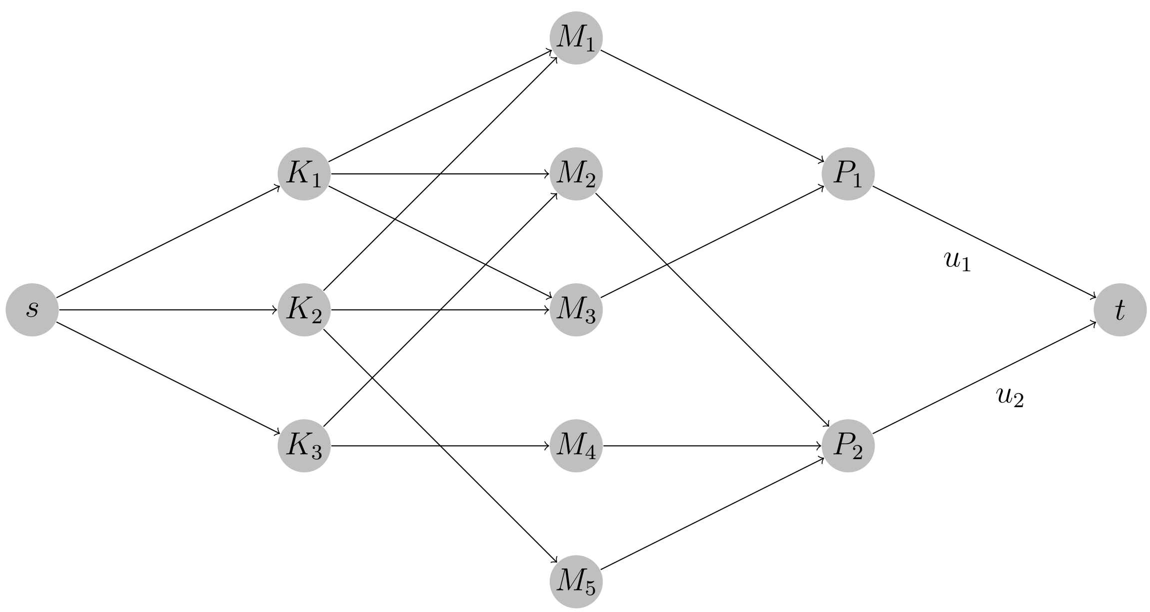
5. (10p.) Miasto ma m mieszkańców $M_1, M_2, \ldots, M_m$, k klubów $K_1, K_2, \ldots, K_k$ i p partii politycznych $P_1, P_2, \ldots, P_p$. Każdy mieszkaniec jest członkiem co najmniej jednego klubu i należy do dokładnie jednej partii politycznej. Znana jest przynależność każdego z mieszkańców zarówno do klubów jak i partii politycznej.

Każdy klub musi nominować jednego ze swoich członków do reprezentowania tegoż klubu w radzie miejskiej – każda osoba może reprezentować co najwyżej jeden klub. W radzie tej może zasiadać co najwyżej $u_i \in \mathbb{N}$ członków należących do partii P_i, dla każdego $i = 1, 2, \ldots, p$, aby rada ta była politycznie zrównoważona.

Zdefiniuj sieć, której maksymalny przepływ wynosi dokładnie k wtedy i tylko wtedy gdy możliwy jest politycznie zrównoważony wybór reprezentantów. Udowodnij, że zdefiniowana sieć spełnia powyższy warunek.

Rozwiązanie. Wprowadźmy następujące oznaczenia: $K = \{K_1, K_2, \ldots, K_k\}$, $M = \{M_1, M_2, \ldots, M_m\}$, $P = \{P_1, P_2, \ldots, P_p\}$. Sieć N definiujemy następująco:

- zbiorem wierzchołków N będzie $K \cup M \cup P$ i dwa nowe wierzchołki: źródło s i ujście t,
- dodajemy do N łuki od s do wszystkich wierzchołków z K, przy czym $c(sK_i) = 1$,
- dodajemy do N łuki K_iM_j dla każdej pary i, j takiej, że mieszkaniec M_j należy do klubu K_i, przy czym $c(K_iM_j) = 1$,
- dodajemy do N łuki M_jP_i dla każdej pary j, i takiej, że mieszkaniec M_j należy do partii P_i, przy czym $c(M_jP_i) = 1$,
- dodajemy do N łuki od wszystkich wierzchołków z P do t, przy czym $c(P_it) = u_i$.



Rysunek 1: Przykładowa sieć. Łuki bez podanej przepustowości mają przepustowość 1.

Zauważmy, że dla każdego wyboru k reprezentantów spełniającego warunki zadania istnieje następujący przepływ f:

- $f(sK_i) = 1$ dla każdego $i = 1, 2, \ldots, k$,
- dla każdej pary K_iM_j takiej, że M_j jest reprezentantem klubu K_i: $f(K_iM_j) = 1$,
- dla każdej pary M_jP_i takiej, że M_j jest reprezentantem pewnego klubu oraz należy do partii P_i: $f(M_jP_i) = 1$,

- dla każdego $P_i \in P$ wartość $f(P_i t)$ jest równa liczbie reprezentantów partii P_i w radzie,
- dla pozostałych łuków wartość przepływu wynosi 0.

Zauważmy, że tak zdefiniowana funkcja jest przepływem. Faktycznie, dla każdego łuku a typu sK_i lub $K_i M_j$ lub $M_j P_i$ zachodzi $f(a) \leq 1 = c(a)$. Ponieważ wybór reprezentantów jest zrównoważony, zachodzi też $f(P_i t) \leq u_i = c(P_i t)$. Prawo Kirchhoffa jest spełnione dla wierzchołków K_i, ponieważ każdy klub nominuje dokładnie jednego reprezentanta. Każdy mieszkaniec-reprezentant został nominowany przez jeden klub i należy do dokładnie jednej partii, więc $f^+(M_j) = f^-(M_j)$. Wreszcie $f^+(P_i) = f^-(P_i)$ z definicji $f(P_i t)$. Ponieważ $f^+(s) = k$ i $f^-(s) = 0$ zatem $\mathrm{val}(f) = k$.

By pokazać implikację w drugą stronę, najpierw zauważmy, że wszystkie przepustowości w sieci są całkowite, zatem wśród maksymalnych przepływów jest taki, którego wartości na wszystkich krawędziach są całkowite. Rozważmy maksymalny przepływ f o całkowitych wartościach na krawędziach. Zauważmy, że dla każdego łuku $M_j P_i$ (gdzie P_i jest partią, do której należy M_j) zachodzi $f(M_j P_i) \leq 1$, zatem $f^+(M_j) = f(M_j P_i)$ jest równe 0 lub 1. Do rady wybierzmy te M_j, dla których $f^+(M_j) = 1$. Zauważmy, że tak wybrana rada musi być politycznie zrównoważona, ponieważ $c(P_i t) = u_i$. Dla każdego $K_i \in K$ zachodzi $f^-(K_i) \leq 1$, zatem dla każdego $i = 1, \ldots, k$ istnieje co najwyżej jedno $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$ takie, że $f(K_i M_j) = 1$. Zatem każdy klub będzie miał co najwyżej jednego reprezentanta. Jeżeli wartość przepływu f wynosi k, to każdy z k klubów ma reprezentanta.