Zad. 1	Zad. 2	Zad. 3	Zad. 4	Zad. 5	SUMA

1. (10p.) Niech $G = (V, E)$ będzie spójnym grafem o tej własności, że dla każdej krawędzie $e \in E$ istnieją w G cykle C i D takie, że $E(C) \cap E(D) = \{e\}$. Pokaż, że G jest 3-spójny krawędziowo.

Rozwiązanie. Przypuśćmy przeciwnie, zatem spójność krawędziowa grafu G wynosi 1 lub 2, gdyż jest on spójny. Przyjmijmy na razie, że wynosi ona 2. Stąd istnieje dwuelementowy zbiór krawędzi $F = \{e, f\}$ o tej własności, że graf $G - F$ jest niespójny. Niech $V = X \cup Y$ będzie podziałem zbioru wierzchołków takim, że $G[X]$ i $G[Y]$ są składowymi grafu $G - F$. Zarówno krawędź e, jak i f ma jeden koniec w X, a drugi w Y. Niech C_e i D_e będą cyklami w G, które przechodzą przez e i e jest ich jedyną wspólną krawędzią. Ponieważ C_e ma wierzchołki i w X, i w Y, to musi mieć co najmniej dwie XY-krawędzie. Jedynymi takimi krawędziami w G są e i f. To samo możemy powiedzieć o cyklu D_e, ale to oznacza, że C_e i D_e mają co najmniej dwie wspólne krawędzie. Sprzeczność. Podobnie, nawet szybciej, załatwia się przypadek, gdy G ma spójność krawędziową równą 1.

2. (10p.) Przypomnijmy, że *grafem krawędziowym* grafu $G = (V, E)$ nazywamy graf zdefiniowany następująco: $L(G) := (E, \{ef : |e \cap f| = 1\})$, natomiast $\omega(G)$ jest licznością najliczniejszej kliki w G.

Niech $G = (V, E)$ będzie dowolnym grafem. Pokaż, że $\chi(L(G)) \leqslant \omega(L(G)) + 1$.

Rozwiązanie. Niech $c : E \to [\chi'(G)]$ będzie kolorowaniem krawędziowym grafu G. Zauważmy, że c jest kolorowaniem grafu $L(G)$. W istocie, jeśli $e, f \in E$ są takie, że $ef \in E(L(G))$, to z definicji grafu $L(G)$ otrzymujemy, że e i f miały wspólny wierzchołek w G, a więc $c(e) \neq c(f)$, gdyż c jest kolorowaniem krawędziowym grafu G. Tym samym $\chi(L(G)) \leqslant \chi'(G) \leqslant \Delta(G)+1$, gdzie ostatnia nierówność wynika z twierdzenia Wizinga. Pozostaje wykazać, że $\Delta(G) \leqslant \omega(L(G))$. Zwróćmy uwagę, że zbiory $E_v := \{vw : w \in N_G(v)\}$ są klikami w $L(G)$, a to pociąga za sobą $\omega(L(G)) \geqslant \max\{|E_v| : v \in V\} = \Delta(G)$.

3. (10p.) Niech G będzie grafem planarnym. Wykaż, że dla dowolnych pięciu parami różnych wierzchołków v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 zachodzi:

$$\deg v_1 + \deg v_2 + \deg v_3 + \deg v_4 + \deg v_5 \leq 3|V(G)| + 3.$$

Rozwiązanie. Zauważmy, że dla dowolnych pięciu parami różnych wierzchołków v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 krawędzie pomiędzy nimi wliczone są do sumy ich stopni dwukrotnie, a krawędzie pomiędzy nimi a resztą grafu jednokrotnie. Graf jest planarny, więc nie zawiera K_5 jako podgrafu. Stąd krawędzi między wierzchołkami v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 jest co najwyżej $\binom{5}{2} - 1$. Stąd:

$$\deg v_1 + \deg v_2 + \deg v_3 + \deg v_4 + \deg v_5 \leq |E(G)| + \binom{5}{2} - 1 \leq 3n - 6 + 10 - 1 = 3n + 3$$

4. (10p.) Dla $k \geq 2$, przez R_k oznaczmy $R(\underbrace{3, 3, 3, \ldots, 3}_{k \text{ razy}})$, czyli najmniejsze n takie, że w każdym kolorowaniu krawędzi grafu K_n na k kolorów istnieje jednokolorowy trójkąt. Pokaż, że $R_k \leq k(R_{k-1} - 1) + 2$ dla każdego $k \geq 3$.

Rozwiązanie. Niech $n = k(R_{k-1} - 1) + 2$, rozważmy dowolne k-kolorowanie grafu K_n. Niech v będzie wierzchołkiem tego grafu i dla $i = 1, 2, \ldots, k$ niech V_i oznacza zbiór wierzchołków połączonych z v krawędziami w kolorze i. Oczywiście $n = 1 + \sum_{i=1}^{k} |V_i|$. Z zasady szufladkowej wynika, że istnieje i takie, że

$$|V_i| \geq \left\lceil \frac{n-1}{k} \right\rceil = \left\lceil \frac{k(R_{k-1} - 1) + 2 - 1}{k} \right\rceil = \left\lceil R_{k-1} - 1 + \frac{1}{k} \right\rceil = R_{k-1}.$$

Zauważmy, że jeśli istnieją dwa wierzchołki $a, b \in V_i$ takie, że krawędź ab ma kolor i, to a, b, v jest trójkątem w kolorze i. W przeciwnym przypadku wszystkie krawędzie łączące wierzchołki z V_i mają jeden z $k-1$ kolorów: $1, 2, \ldots, i-1, i+1, \ldots, k$. Ponieważ $|V_i| \geq R_{k-1}$, w grafie indukowanym przez V_i istnieje jednokolorowy trójkąt w jednym z kolorów $1, 2, \ldots, i-1, i+1, \ldots, k$.

5. (10p.) Niech $t > 1$ i niech G będzie grafem dwudzielnym o klasach dwudzielności X, Y takim, że $|X| = |Y| = 2t$ i $\delta(G) \geq t$. Pokaż, że w G istnieje skojarzenie doskonałe.

Rozwiązanie. Sprawdzamy warunek Halla dla dowolnego niepustego zbioru $S \subseteq X$, w dwóch przypadkach:

- $|S| \leq t$.
  S jest niepusty zatem istnieje $x \in S$ i $\deg x \geq \delta(G) \geq t$.
  Stąd $|N(S)| \geq \deg x \geq t \geq |S|$.

- $|S| \geq t + 1$.
  Zatem $|X - S| \leq 2t - (t + 1) = t - 1$. Dla dowolnego $y \in Y$ zachodzi $\deg y \geq \delta(G) \geq t > |X - S|$.
  Wobec tego dla każdego $y \in Y$ istnieje $x \in S$ taki, że $xy \in E(G)$.
  Stąd $N(S) = Y$, więc $|N(S)| = 2t \geq |S|$.

Zatem dla każdego niepustego podzbioru zbioru X zachodzi warunek Halla. Z twierdzenia Halla wiemy, że istnieje skojarzenie pokrywające zbiór X, a z równoliczności klas X i Y wynika, że to skojarzenie jest doskonałe.