Zad. 1	Zad. 2	Zad. 3	Zad. 4	Zad. 5	SUMA

1. (10p.) Niech $G = (V, E)$ będzie grafem eulerowskim, a v dowolnie wybranym wierzchołkiem G. Wykazać, że liczba spójnych składowych grafu $G - v$ jest równa co najwyżej $\deg_G(v)/2$.

Rozwiązanie. Niech $C = (v_0, v_1, \ldots, v_{m-1})$ będzie obwodem Eulera w G. Istnieje dokładnie $a := \deg_G(v)/2$ indeksów i takich, że $v_i = v$. Oznaczmy takie indeksy przez $i_1, \ldots, i_a$. Dla każdego j ciąg $v_{i_j+1}, v_{i_j+2}, \ldots, v_{i_{j+1}-1}$ (działania wykonujemy modulo m) jest drogą w $G - v$. Zatem wierzchołki grafu $G - v$ pokryliśmy a drogami. Zbiór wierzchołków każdej z tych dróg indukuje graf spójny, co dowodzi tezy.

2. (10p.) Wykaż, że dla dowolnego grafu $G = (V, E)$ zachodzi $\chi(G) \leqslant |V| - \alpha(G) + 1$, gdzie $\alpha(G)$ oznacza liczność najliczniejszego niezależnego zbioru wierzchołków w G.

Rozwiązanie. Niech $A \subseteq V$ będzie zbiorem niezależnym w G. Wtedy funkcja, która każdemu wierzchołkowi ze zbioru A przyporządkowuje kolor 1, a wszystkim pozostałym wierzchołkom grafu G przyporządkowuje różne kolory od 2 do $|V| - |A| + 1$, jest poprawnym kolorowaniem grafu G. Oznacza to, że $\chi(G) \leqslant |V| - |A| + 1$. Jeśli jako A wybierzemy zbiór niezależny liczności $\alpha(G)$, otrzymujemy tezę.

3. (10p.) Niech $G = (V, E)$ będzie grafem spójnym. Wykaż, że G jest drzewem wtedy i tylko wtedy, gdy spełniona jest własność $(\star)$: każdy spójny podgraf G o co najmniej dwóch wierzchołkach zawiera wierzchołek stopnia 1.

Rozwiązanie.

Załóżmy najpierw, że G jest drzewem i rozważmy dowolny jego spójny podgraf H o co najmniej dwóch wierzchołkach. Zauważmy, że H jest drzewem. Z ćwiczeń wiemy, że każde drzewo o co najmniej dwóch wierzchołkach ma liść (czyli wierzchołek stopnia 1), co pokazuje, że G ma własność $(\star)$.

Teraz przypuśćmy, że G nie jest drzewem, skoro jest spójny, to musi zawierać cykl C. Cykl ten jest spójnym podgrafem G o co najmniej dwóch wierzchołkach, który nie ma wierzchołka stopnia 1. Zatem G nie ma własności $(\star)$.

Podsumowując, pokazaliśmy, że G jest drzewem wtedy i tylko wtedy, gdy ma własność $(\star)$.

4. (10p.) Niech odd(G) oznacza liczbę spójnych składowych grafu G, które mają nieparzystą liczbę wierzchołków. Pokaż, że jeśli graf G ma skojarzenie doskonałe, to dla każdego $S \subseteq V(G)$ zachodzi $\mathrm{odd}(G-S) \leq |S|$.

Rozwiązanie. Niech M będzie skojarzeniem doskonałym w G, S będzie dowolnym zbiorem wierzchołków, a $\mathcal{C}$ będzie zbiorem spójnych składowych grafu $G - S$ o nieparzystej liczbie wierzchołków. Rozważmy składową $C \in \mathcal{C}$. Każdy wierzchołek należy do pewnej krawędzi z M. Ponieważ nie ma krawędzi z C do innych składowych grafu $G - S$ oraz liczba wierzchołków w C jest nieparzysta, co najmniej jedna krawędź z M musi łączyć C i S. Zatem w M istnieje co najmniej $|\mathcal{C}| = \mathrm{odd}(G - S)$ krawędzi łączących składowe z $\mathcal{C}$ i S. Ponieważ M jest skojarzeniem, każdy wierzchołek z S może należeć do co najwyżej jednej z tych krawędzi, zatem wierzchołków w S musi być co najmniej $\mathrm{odd}(G - S)$.

5. (10p.) Niech $G = (V, E)$ będzie spójnym, prostym grafem planarnym, samodualnym (czyli izomorficznym ze swoim grafem dualnym, $G \simeq G^*$). Pokaż, że jeśli G ma co najmniej 3 wierzchołki, to ma co najmniej 2 wierzchołki stopnia nie większego niż 3.

Rozwiązanie. Nie wprost załóżmy, że G ma co najmniej 3 wierzchołki i co najwyżej jeden z nich ma stopień mniejszy lub równy 3. Ustalmy rysunek płaski grafu G i niech F oznacza zbiór ścian. Wtedy:

$$2|E| = \sum_{v \in V} \deg(v) \geq 4(|V| - 1) + 1 = 4|V| - 3.$$

Graf G jest samodualny, więc $|V| = |F|$. Zatem, korzystając z formuły Eulera, otrzymujemy:

$$2|E| = 2(|V| + |F| - 2) = 2(2|V| - 2) = 4|V| - 4.$$

Ostatecznie: $4|V| - 4 \geq 4|V| - 3$, sprzeczność.