1. (5p.) Przypomnijmy, że dla grafu G, graf G^2 powstaje z G przez dodanie krawędzi łączących wszystkie wierzchołki oddalone od siebie o 2.

Niech $|V(G)| \geqslant 3$. Wykaż, że G jest spójny wtedy i tylko wtedy, gdy G^2 jest 2-spójny.

Rozwiązanie. ($\Leftarrow$) Weźmy dowolne wierzchołki u i v grafu G. Pokażemy, że w G istnieje u-v-spacer. Z dowolności wyboru u i v będzie to oznaczało, że G jst spójny.

Graf G^2 jest spójny, więc istnieje w nim ścieżka $P = w_0, w_1, \ldots, w_k$, gdzie $w_0 = u$ i $w_k = v$. Dla każdego $i \in [k]$ wykonajmy następującą czynność. Przypuśćmy, że $w_{i-1}w_i \notin E(G)$. Ponieważ $w_{i-1}w_i \in E(G^2)$, w G istnieje wierzchołek x_i, który jest wspólnym sąsiadem w_{i-1} i w_i. Modyfikuję P wstawiając x_i pomiędzy w_{i-1} a w_i.

Niech P' będzie ciągiem wierzchołków otrzymanym po zakończeniu powyższej procedury. Zauważmy, że P' jest spacerem w G, rozpoczynającym się w u i kończącym się w v.

($\Rightarrow$) Teraz załóżmy, że G jest spójny i przypuśćmy, że G^2 nie jest 2-spójny, czyli ma wierzchołek rozcinający x (korzystamy tu z tego, że $|V(G)| = |V(G^2)| \geqslant 3$).

Niech A i B będą różnymi składowymi grafu $G^2 - x$. Wybierzmy wierzchołek a z A i b z B. Ze spójności grafu G wiemy, że istnieje w nim ścieżka $P = w_0, w_1, \ldots, w_k$, gdzie $a = w_0$ i $b = w_k$. Jeśli ścieżka ta nie zawiera wierzchołka x, jest też ścieżką w $G^2 - x$, sprzeczność z wyborem a, b.

Zatem niech $w_i = x$. Ponieważ wierzchołki na P nie powtarzają się, w_i to jedyne wystąpienie wierzchołka x na P. Co więcej, ponieważ $w_0 = a$ i $w_k = b$, otrzymujemy, że $1 \leqslant i \leqslant k-1$.

Skoro wierzchołki w_{i-1} i w_{i+1} mają w G wspólnego sąsiada (wierzchołek x), są sąsiadami w G^2. Zatem $w_0, w_1, \ldots, w_{i-1}, w_{i+1}, \ldots, w_k$ jest a-b-ścieżką w $G^2 - x$, sprzeczność. $\square$

2. (5p.) Niech G będzie grafem pełnym o n wierzchołkach oraz niech $E_1, E_2 \subseteq E(G)$ będą takie, że:

(1.) $E_1 \cup E_2 = E(G)$,

(2.) grafy $G[E_1]$ i $G[E_2]$ są eulerowskie,

(3.) $\forall_{v \in V(G)}\ \deg_{G[E_1 \cap E_2]} < \frac{n-1}{2}$.

Pokaż, że $G[E_1 \Delta E_2]$ jest eulerowski, gdzie Δ oznacza różnicę symetryczną zbiorów, tj. $A \Delta B = A \cup B \setminus (A \cap B)$.

Przypomnijmy, że przez $G[E_1]$ oznaczamy graf indukowany przez zbiór krawędzi E_1.

Rozwiązanie.

Oznaczmy $G' := G[E_1 \Delta E_2]$. Pokażemy, że G' jest eulerowski, czyli z tw. Eulera musimy pokazać, że stopnie wszystkich wierzchołków grafu G' są parzyste oraz że G' jest spójny.

Rozważmy dowolny $v \in V(G')$ i niech F_1 oraz F_2 oznaczają odpowiednio zbiory krawędzi z E_1 oraz E_2 incydentnych z v. Ponieważ $G[E_1]$ i $G[E_2]$ są eulerowskie, to $|F_1|$ oraz $|F_2|$ są parzyste. W grafie G' krawędzie incydentne z v to dokładnie te z $F_1 \Delta F_2$, czyli $F_1 \cup F_2 \setminus (F_1 \cap F_2)$. Zauważmy, że $|F_1 \setminus (F_1 \cap F_2)|$ oraz $|F_2 \setminus (F_1 \cap F_2)|$ mają tę samą parzystość, bo od zbiorów liczności parzystej odejmujemy tę samą część wspólną, zatem $|F_1 \Delta F_2| = |F_1 \setminus (F_1 \cap F_2)| + |F_2 \setminus (F_1 \cap F_2)|$ jest parzyste. Czyli $\deg_{G'} v$ jest parzyste dla dowolnego wierzchołka $v \in V(G')$.

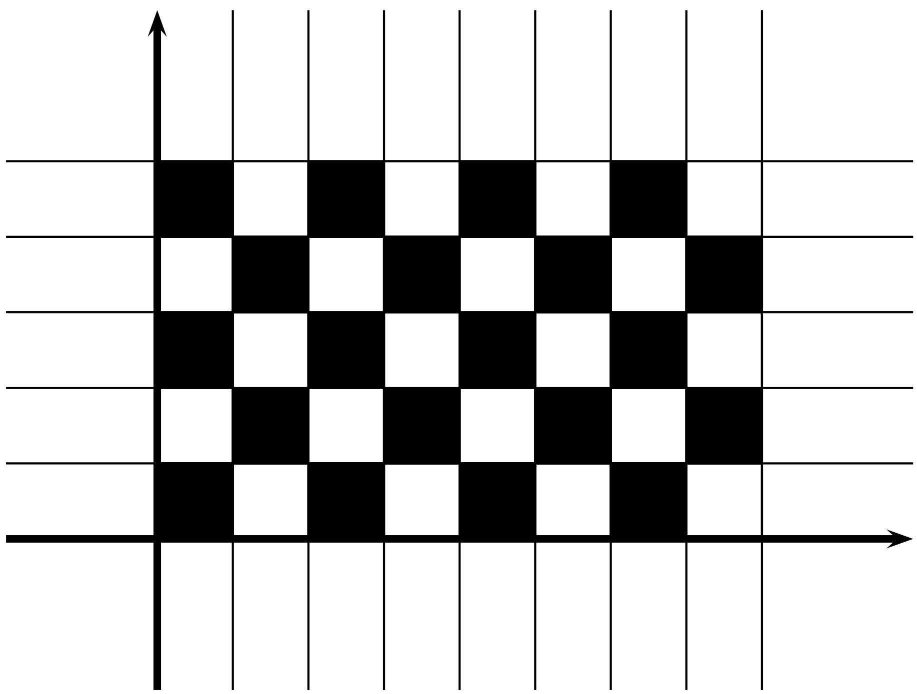
Pozostaje pokazać, że G' jest spójny. Ponieważ G jest grafem pełnym o n wierzchołkach, to dla dowolnego $v \in V(G)$ zachodzi $\deg_G v = n - 1$. Oznaczmy jak wcześniej krawędzie incydentne z v w zbiorach E_1 i E_2 odpowiednio przez F_1 i F_2. Z (3.) wiemy, że $|F_1 \cap F_2| < \frac{n-1}{2}$, a z (1.) wiemy, że $|F_1 \cup F_2| = n - 1$, więc $|F_1 \Delta F_2| \geqslant \frac{n-1}{2}$ oraz $\deg_{G'} v \geqslant \frac{n-1}{2}$. Z zadania 1.12 z ćwiczeń (wstawiając $k = 1$), wiemy, że jeśli $\delta(G') \geqslant \frac{n-1}{2}$, to G' jest spójny.

Aby rozwiązanie było kompletne, przedstawmy ten argument tutaj. Załóżmy nie wprost, że G' nie jest spójny i niech G'' oznacza składową G', która zawiera co najwyżej $\frac{n}{2}$ wierzchołków – taka składowa istnieje, ponieważ $|G'| \leqslant |G| = n$. Rozważmy wierzchołek u ze składowej G''. Wszyscy jego sąsiedzi muszą także należeć do składowej G'', czyli może być ich co najwyżej $|G''| - 1 \leqslant \frac{n}{2} - 1$. Z drugiej strony $\deg_{G'} u \geqslant \frac{n-1}{2} > \frac{n}{2} - 1$ – sprzeczność! Zatem G' spójny i na mocy tw. Eulera G' jest eulerowski. $\square$

3. (5p.) Niech $a, b > 1$. Rozważmy graf G, którego wierzchołkami są kwadraty jednostkowe (o boku długości 1) wyznaczone przez proste $x = i$ dla $i \in \{0, 1, \ldots, a\}$ oraz proste $y = j$ dla $j \in \{0, 1, \ldots, b\}$, a krawędzie łączą te wierzchołki grafu G, które mają wspólny bok. Zbadaj dla jakich a i b graf G jest hamiltonowski.

Rozwiązanie. Do rozważanych kwadratów będziemy odnosić poprzez współrzędne (x, y) ich prawego górnego rogu.

Zauważmy, że w grafie G jest $a \cdot b$ wierzchołków. Ponadto jest to graf dwudzielny. Aby uzasadnić tę drugą obserwację zdefiniujemy $X := \{(x, y) \in V(G) : x + y \text{ jest parzyste}\}$, a $Y := V(G) - X$. Zauważmy, że jeśli dwa kwadraty mają wspólny bok, to znaczy, że jedną współrzędną prawego górnego rogu mają taką samą, a ich drugie współrzędne różnią się o 1. Oznacza to, że sumy współrzędnych prawych górnych rogów sąsiadujących w G kwadratów różnią się o 1, a zatem mają różną parzystość, co w konsekwencji dowodzi, iż X i Y są klasami dwudzielności grafu G. (Tę samą myśl mniej precyzyjnie można wyrazić tak, że jak pomalujemy kwadraty w szachownicę, to kwadraty o wspólnych bokach mają różne kolory - patrz rysunek.)



Te dwie obserwacje dowodzą, że jak zarówno a, jak i b są liczbami nieparzystymi, to G nie ma cyklu Hamiltona, gdyż jak wiadomo z ćwiczeń, graf dwudzielny może mieć cykl Hamiltona tylko wtedy, gdy ma równoliczne klasy dwudzielności, co w przypadku nieparzystej liczby wierzchołków w G jest niemożliwe.

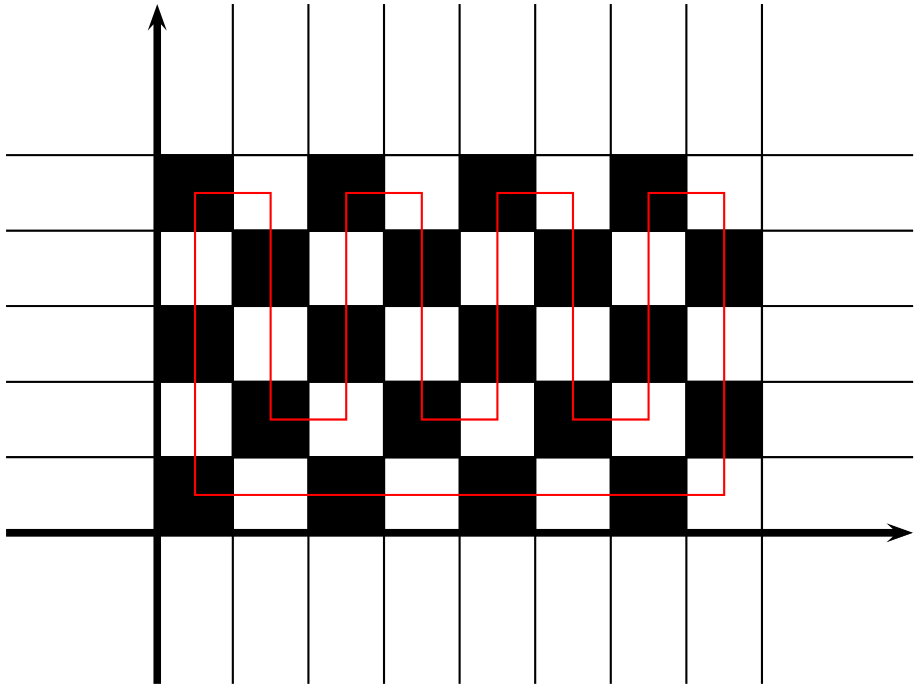
Przypuśćmy teraz, że co najmniej jedna z liczb a i b jest parzysta. Bez straty ogólności załóżmy, że $a = 2k$. Wtedy (lepiej najpierw spojrzeć na rysunek)

$$(1,1)(1,2)\ldots(1,b)(2,b)(2,b-1)\ldots(2,2)(3,2)(3,3)\ldots(3,b)(4,b)(4,b-1)\ldots(4,2)\ldots$$

$$(2j-1,2)(2j-1,3)\ldots(2j-1,b)(2j,b)(2j,b-1)\ldots(2j,2)\ldots$$

$$(2k-1,2)(2k-1,3)\ldots(2k-1,b)(2k,b)(2k,b-1)\ldots(2k,2)(2k,1)(2k-1,1)\ldots(2,1)(1,1)$$

jest cyklem Hamiltona w G. $\square$



4. (5p.) Przypomnijmy, że graf G jest *klasy 1* jeśli $\chi'(G) = \Delta(G)$. Ponadto *blokiem* nazywamy maksymalny podgraf bispójny.

Pokaż, że jeśli każdy blok grafu G jest klasy 1, to G też jest klasy 1.

Rozwiązanie. Indukcja po liczbie bloków w G. Jeśli graf G ma tylko jeden blok (czyli cały jest swoim blokiem), teza wynika bezpośrednio z założenia.

Przypuśćmy zatem, że G ma co najmniej dwa bloki i twierdzenie jest prawdziwe dla wszystkich grafów, które mają mniej bloków niż G.

Niech v będzie wierzchołkiem rozcinającym w grafie G; taki istnieje, bo G ma co najmniej dwa bloki. Niech $\widetilde{C_1}, \dots, \widetilde{C_p}$ będą składowymi grafu $G - v$. Dla $i \in [p]$, przez C_i oznaczmy podgraf G indukowany przez $V(\widetilde{C_i}) \cup \{v\}$.

Rozważmy graf C_i dla $i \in [p]$. Ma on mniej bloków niż G, więc z założenia indukcyjnego istnieje jego kolorowanie f_i na $\Delta(C_i) \leqslant \Delta(G)$ kolorów.

Bez straty ogólności (zamieniając odpowiednie kolory miejscami, jeśli trzeba), możemy założyć, że zbiory kolorów użytych na krawędziach incydentnych z v w różnych blokach mają różne kolory (łącznie kolorów jest $\Delta(G)$, a $\deg v \leqslant \Delta(G)$).

Zdefiniujmy kolorowanie f krawędzi G. Roważmy dowolną krawędź e i zauważmy, że należy ona do dokładnie jednego grafu C_i. Definiujemy wtedy $f(e) = f_i(e)$.

Kolorowanie to używa co najwyżej $\Delta(G)$ kolorów. Uzasadnijmy zatem, że jest poprawne. Rozważmy dwie krawędzie e, e' o wspólnym wierzchołku z. Jeśli $z \neq v$, to obie krawędzie e, e' są zawarte w jednym grafie C_i, więc dostają różne kolory (zgodnie z kolorowanie f_i). Jeśli $v = z$, to krawędzie e i e' dostają różne kolory, bo tak dobraliśmy kolorowania f_i dla $i \in [p]$. To kończy dowód. $\square$