1. (5p.) Niech G będzie grafem dwuspójnym i niech (A, B) będzie podziałem zbioru $V(G)$, gdzie $|A| \geqslant 3$ i $G[A]$ jest spójny. Niech G' będzie grafem otrzymanym z G przez ściągnięcie zbioru B do jednego wierzchołka, czyli formalnie

$$\begin{aligned} V(G') &= A \cup \{b\} \\ E(G') &= \{xy \in E(G) \mid x, y \in A\} \cup \{xb \mid (\exists y \in B)\ xy \in E(G) \wedge x \in A\}. \end{aligned}$$

Pokaż, że G' jest dwuspójny.

Rozwiązanie. Graf G' ma co najmniej trzy wierzchołki, więc należy tylko pokazać, że nie ma wierzchołków rozcinających. Przypuśćmy przeciwnie, niech z będzie takim wierzchołkiem. Zauważmy, że $z \neq b$, bo z założenia $G' - z = G[A]$ jest spójny. Zatem $z \in A$. Wybierzmy dowolne wierzchołki u, v z grafu $G' - z$.

Rozważmy graf $G - z$. Jest on spójny z założenia o dwuspójności G. Mamy dwa przypadki:

Przypadek 1: $u, v \in A$. Wtedy w $G - v$ istnieje u-v-ścieżka P. Ścieżka ta może wielokrotnie odwiedzać zbiór B. Każdy segment P składający się z wierzchołków z B zamieńmy na pojedyncze wystąpienie wierzchołka b. W ten sposób otrzymaliśmy u-v-spacer w $G' - z$.

Przypadek 2: $b \in \{u, v\}$. Bez straty ogólności niech $u \in A$ i $v = b$. Wybierzmy dowolny wierzchołek $w \in B$. Graf $G - z$ jest spójny, więc istnieje w nim u-w-ścieżka. Przekształcając ją analogicznie jak w przypadku 1, otrzymujemy u-b-spacer w $G' - z$.

W obu przypadkach znaleźliśmy w $G' - z$ spacer od u do v. Z dowolności wyboru u, v wnioskujemy, że z nie jest wierzchołkiem rozcinającym – sprzeczność. Zatem graf G' jest dwuspójny. $\square$

2. (5p.) Niech G będzie spójnym grafem, w którym żadne dwa wierzchołki nieparzystego stopnia nie sąsiadują. Pokaż, że G jest eulerowski wtedy i tylko wtedy, gdy $L(G)$ jest eulerowski.

Przypomnijmy, że $L(G)$ to graf krawędziowy, czyli $V(L(G)) = E(G)$ i dwie różne krawędzie grafu G sąsiadują w $L(G)$ wtedy i tylko wtedy, gdy mają wspólny wierzchołek.

Rozwiązanie. Z ćwiczeń wiemy, że jeśli G jest eulerowski, to $L(G)$ też jest eulerowski. Musimy zatem pokazać, że przy naszym założeniu na G przeciwna implikacja zachodzi. Równoważnie, jeśli G nie jest eulerowski, to $L(G)$ nie jest eulerowski.

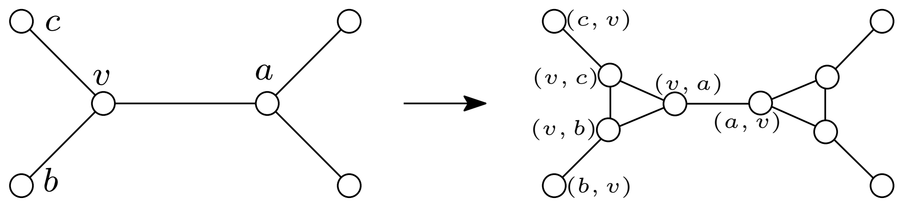
Niech G będzie grafem spełniającym założenia, który nie jest eulerowski. Ponieważ G jest spójny, wiemy, że musi mieć wierzchołek nieparzystego stopnia, nazwijmy go v. Niech w będzie dowolnym sąsiadem v. Z założenia o G stopień w musi być parzysty. Zauważmy, że $\deg_{L(G)} vw = (\deg_G v - 1) + (\deg_G w - 1)$. Jest to liczba nieparzysta, więc $L(G)$ nie jest eulerowski. $\square$

3. (5p.) Niech $n \geqslant 5, \Delta \geqslant 4$ i niech G będzie grafem o n wierzchołkach, $n+\Delta-2$ krawędziach i największym stopniu $\Delta(G) = \Delta$. Ponadto, załóżmy, że w G istnieją co najmniej dwa wierzchołki stopnia większego niż 3. Pokaż, że G nie jest hamiltonowski.

Rozwiązanie. Niech $u \in V(G)$ będzie wierzchołkiem stopnia Δ i rozważmy graf $G' := G - u$. Jeśli G' jest niespójny, to znaczy, że usunięcie zbioru $\{u\}$ rozbija graf na co najmniej dwie składowe, czyli G nie spełnia warunku koniecznego na istnienie cyklu Hamiltona.

Załóżmy zatem, że G' jest spójny. Zauważmy, że G' ma $n-1$ wierzchołków i $n-2$ krawędzie, bo usunęliśmy krawędzie incydentne z u, a wszystkie pozostałe krawędzie są też w G'. Zatem G' musi być drzewem. Z założenia wiemy, że w G istnieje wierzchołek $v \neq u$ o stopniu co najmniej 4. Stopień v w G' wynosi co najmniej 3, bo v stracił co najwyżej jedną krawędź (czyli uv, jeśli istniała). Skoro G' jest drzewem z wierzchołkiem v stopnia co najmniej 3, to $G'-v$ ma co najmniej trzy składowe. Inaczej mówiąc, graf $G-\{u,v\}$ ma co najmniej trzy składowe, więc G nie spełnia warunku koniecznego na istnienie cyklu Hamiltona. $\square$

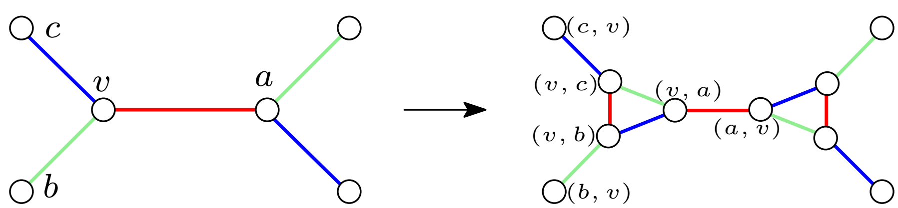
4. (5p.) Niech G będzie grafem 3-regularnym. Zdefiniujmy graf G' zamieniając każdy wierzchołek grafu G na trójkąt: formalnie, dla każdego wierzchołka $v \in V(G)$, graf G' zawiera trzy wierzchołki $(v, a), (v, b)$ i (v, c), gdzie a, b i c to wierzchołki sąsiadujące z v w G. Dwa wierzchołki (x_1, y_1) i (x_2, y_2) sąsiadują w G' jeśli $x_1 = x_2$ lub $(x_2, y_2) = (y_1, x_1)$.



Pokaż, że $\chi'(G) = \chi'(G')$.

Rozwiązanie. Zauważmy, że $\Delta(G) = \Delta(G') = 3$. Ponieważ z twierdzenia Vizinga dostajemy, że $\chi'(G), \chi'(G') \in \{3, 4\}$, wystarczy pokazać, że $\chi'(G) \leqslant 3$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\chi'(G') \leqslant 3$.

Najpierw załóżmy, że $\chi'(G) = 3$. Niech $c : E(G) \to \{1, 2, 3\}$ będzie poprawnym kolorowaniem krawędziowym grafu G. Zdefiniujmy kolorowanie $c' : E(G') \to \{1, 2, 3\}$ następująco: jeśli krawędź $(x_1, y_1)(x_2, y_2)$ jest typu $(x_2, y_2) = (y_1, x_1)$, wówczas $c'((x_1, y_1)(x_2, y_2)) = c(x_1 y_1)$. Zauważmy, że każdy wierzchołek jest incydentny z dokładnie jedną taką krawędzią. Pozostaje nam pokolorować krawędzie wewnątrz trójkątów: rozważmy trójkąt składający się z wierzchołków $(v, a), (v, b)$ oraz (v, c), dla pewnego $v \in V(G)$ takiego że $N_G(v) = \{a, b, c\}$. Zauważmy, że $c'((v, a)(a, v))$, $c'((v, b)(b, v))$ i $c'((v, c)(c, v))$ to trzy różne kolory, ponieważ $c(va)$, $c(vb)$ i $c(vc)$ to trzy różne kolory. Oznacza to, że możemy dokolorować krawędzie trójkąta: $c'((v, a)(v, b)) = c'((v, c)(c, v))$, $c'((v, b)(v, c)) = c'((v, a)(a, v))$ oraz $c'((v, c)(v, a)) = c'((v, b)(b, v))$ (jak na rysunku poniżej). Znaleźliśmy poprawne 3-kolorowanie krawędziowe grafu G', co oznacza, że $\chi'(G') \leqslant 3$.



Żeby pokazać implikację przeciwną załóżmy, że $\chi'(G') = 3$. Niech $c' : E(G') \to \{1, 2, 3\}$ będzie poprawnym kolorowaniem krawędziowym grafu G'. Zdefiniujmy kolorowanie $c : E(G) \to \{1, 2, 3\}$ w następujący sposób: dla każdej krawędzi uv mamy $c(uv) = c'((u, v)(v, u))$.

Pokażemy nie wprost, że c jest poprawne. W przeciwnym wypadku istnieje wierzchołek $v \in V(G)$ oraz $a, b \in N_G(v)$ takie że $c(va) = c(vb)$. Bez utraty ogólności załóżmy, że $c(va) = 1$. Oznacza to, że $c'((v, a)(a, v)) = c'((v, b), (b, v)) = 1$. Zauważmy jednak, że wówczas c' krawędzie $(v, a)(v, b)$, $(v, b)(v, c)$ oraz $(v, c)(v, a)$ (gdzie c jest trzecim sąsiadem v w G) muszą być pokolorowane na kolory 2 i 3, ponieważ wierzchołki (v, a) oraz (v, b) są już incydentne z krawędzią w kolorze 1. Wiemy jednak, że $(v, a)(v, b)$, $(v, b)(v, c)$ oraz $(v, c)(v, a)$ tworzą trójkąt w G', więc jest to niemożliwe. Dostajemy sprzeczność z tym, że c' jest poprawne. Oznacza to, że c jest poprawnym 3-kolorowaniem krawędziowym grafu G, czyli $\chi'(G) \leqslant 3$. $\square$