1. (5p.) Niech $G = (V, E)$ będzie grafem dwuspójnym o co najmniej trzech wierzchołkach i niech xy będzie krawędzią G. Pokaż, że graf $G' = (V, E \setminus \{xy\})$ jest dwuspójny wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje w nim cykl zawierający x i y.

Przypominamy, że na cyklu wierzchołki nie powtarzają się (oczywiście poza tym, że pierwszy jest równy ostatniemu).

Rozwiązanie. (Dowód $\rightarrow$) Na podstawie własności udowodnionej na ćwiczeniach wiemy, że jeśli G' jest dwuspójny, to dla każdej pary wierzchołków istnieje cykl, który je zawiera – skoro dla każdej, to też dla x, y.

(Dowód $\leftarrow$) Przypuśćmy przeciwnie, tj. x i y należą do pewnego cyklu C w G', ale G' nie jest dwuspójny. Ponieważ $|V(G')| \geqslant 3$, oznacza to, że G' istnieje wierzchołek rozcinający v.

Zauważmy, że jeśli x i y należą do tej samej składowej grafu $G' - v$, wówczas należą do tej samej składowej grafu $G - v$, czyli v jest wierzchołkiem rozcinającym również w G: sprzeczność z dwuspójnością tego grafu. Taką samą konkluzję osiągamy, gdy $v \in \{x, y\}$. W takim razie x i y muszą należeć do różnych składowych grafu $G' - v$. W grafie $G' - v$ istnieje jednak x-y-ścieżka (bo istnieje taka w $C - v$), sprzeczność.

(Dowód $\leftarrow$ nieco inaczej) Przypuśćmy przeciwnie, tj. x i y należą do pewnego cyklu w G', ale G' nie jest dwuspójny. Ponieważ $|V(G')| \geqslant 3$, oznacza to, że w G' istnieje wierzchołek rozcinający v.

Weźmy dowolne wierzchołki a, b z różnych składowych $G' - v$. Niech P_a będzie najkrótszą ścieżką w $G - v$ o jednym końcu w a a drugim w $\{x, y\}$, taka ścieżka istnieje, bo G jst dwuspójny, więc $G - v$ jest spójny. Zauważmy, że ponieważ P_a jest najkrótsza, nie zawiera ona krawędzi xy. Podobnie, niech P_b będzie najkrótszą ścieżką w $G - v$ o jednym końcu w b i drugim w $\{x, y\}$.

Jeśli koniec P_a i P_b w $\{x, y\}$ jest w samym wierzchołku, łącząc te ścieżki otrzymujemy a-b-spacer w $G' - v$. Rozważmy zatem przypadek, że P_a i P_b mają końce w różnych wierzchołkach z $\{x, y\}$. Zauważmy, że skoro w G' istnieje cykl zawierający x i y, to w $G' - v$ istnieje x-y-ścieżka P_{xy}. Łącząc ścieżki P_a, P_{xy}, P_b otrzymujemy a-b-spacer w $G' - v$. W obu przypadkach dostaliśmy sprzeczność w tym, że a i b są w różnych składowych $G' - v$. $\square$

2. (5p.) Niech G będzie grafem regularnym o nieparzystej liczbie wierzchołków. Pokaż, że G lub $\overline{G}$ jest eulerowski.

Przypomnijmy, że przez $\overline{G}$ oznaczamy dopełnienie grafu G, czyli $\overline{G} = (V(G), \binom{V(G)}{2} \setminus E(G))$.

Rozwiązanie. Skoro graf jest regularny, istnieje k takie, że stopień każdego wierzchołka G wynosi k. Ponieważ G ma nieparzystą liczbę wierzchołków, k musi być parzyste. Istotnie, w przeciwnym razie liczba $\sum_{v \in V(G)} \deg(v)$ jest nieparzysta, co stanowi sprzeczność z lematem o uściskach dłoni. Zauważmy, że graf $\overline{G}$ jest k'-regularny dla $k' = |V(G)| - k - 1$, więc analogicznie otrzymujemy, że k' jest parzyste (można też zauważyć, że jest różnicą dwóch liczb nieparzystych).

Zatem jeśli co najmniej jeden z grafów G lub $\overline{G}$ jest spójny, z twierdzenia Eulera wynika, że jest on eulerowski, co właśnie należy pokazać.

Przypuśćmy zatem, że G nie jest spójny. Oznacza to, że możemy podzielić $V(G)$ na podzbiory A i B (niekoniecznie spójne składowe), takie że nie ma w G krawędzi o jednym końcu w A i drugim w B. Ustalmy dowolne różne $u, v \in V(G) = V(\overline{G})$, pokażemy, że istnieje między nimi ścieżka w $\overline{G}$. Zauważmy, że u i v są w różnych zbiorach spośród A, B, to $uv \notin E(G)$, więc $uv \in E(\overline{G})$. W takim razie możemy założyć bez utraty ogólności, że $u, v \in A$. Niech b będzie dowolnym wierzchołkiem z B. Wówczas $ub, bv \notin E(G)$, więc u, b, v jest u-v-ścieżką w $\overline{G}$.

Z dowolności wyboru a, b otrzymujemy, że graf $\overline{G}$ jest spójny. □

3. (5p.) Niech T będzie drzewem o co najmniej dwóch wierzchołkach. Pokaż, że $T\square K_2$ jest hamiltonowski wtedy i tylko wtedy gdy T jest ścieżką.

Przypomnijmy, że dla grafów G i H, ich iloczyn kartezjański to graf $G\square H$ zdefinowany następująco:

$$\begin{aligned}
&V(G\square H) = V(G) \times V(H),\\
&E(G\square H) = \{(v_1, w_1)(v_2, w_2) \mid (v_1v_2 \in E(G) \wedge w_1 = w_2) \vee (v_1 = v_2 \wedge w_1w_2 \in E(H)\}.
\end{aligned}$$

Rozwiązanie. Oznaczmy $V(K_2) = \{1, 2\}$. Pokażemy najpierw, że jeśli T jest ścieżką, to graf $T\square K_2$ jest hamiltonowski. Istotnie, jeśli oznaczymy przez $p_1, p_2, \ldots, p_n$ kolejne wierzchołki ścieżki T, z definicji operacji $\square$ wynika, że $(p_1, 1), (p_2, 1), \ldots, (p_n, 1), (p_n, 2), (p_{n-1}, 2), \ldots, (p_1, 2), (p_1, 1)$ jest cyklem Hamiltona w $T\square K_2$.

Pozostało pokazać, że jeśli $T\square K_2$ jest hamiltonowski, to T musi być ścieżką. Załóżmy przeciwnie. Jeśli T nie jest ścieżką, istnieje wierzchołek $t \in V(T)$ oraz $k \geqslant 3$ takie że $\deg_T(t) = k$. Zdefiniujmy $S = \{(t, 1), (t, 2)\} \subseteq V(T\square K_2)$. Z warunku koniecznego istnienia cyklu Hamiltona wiemy, że $T' = T\square K_2 - S$ ma co najwyżej dwie składowe (*).

Pokażemy, że każdy sąsiad wierzchołka $(t, 1)$ w grafie $T' = T\square K_2 - S$ jest w innej składowej tego grafu. Istotnie, w przeciwnym wypadku istnieje $(t_1, 1)$-$(t_2, 1)$ ścieżka P w T' dla pewnych $t_1, t_2 \in N_{T\square K_2}(t)$. Niech P' będzie ciągiem wierzchołków T powstałym z P poprzez (i) zastąpienie każdego wierzchołka z P jego pierwszą współrzędną, a następnie (ii) jeśli w powstałym ciągu wierzchołek powtarza się dwa razy z rzędu, usunięcie jego drugiego wystąpienia. Zauważmy, że t_1 i t_2 są, odpowiednio, pierwszym i ostatnim wierzchołkiem w P', oraz że t nie występuje w P'. Ponadto, z definicji $T\square K_2$ wynika, że każde dwa kolejne wierzchołki w P' są połączone krawędzią w T. Oznacza to, że P' jest t_1-t_2-spacerem w $T - t$, więc t_1 oraz t_2 należą do jednej składowej $T - t$. W takim razie istnieje t_1-t_2-ścieżka Q w $T - t$, sprzeczność, bo Q wraz z t tworzy cykl w T.

Skoro tak, każdy sąsiad wierzchołka $(t, 1)$ w grafie T' jest w innej składowej tego grafu. To oznacza, że T' ma co najmniej $k \geqslant 3$ składowe, sprzeczność z (*). $\square$

4. (5p.) Niech $n \geqslant 1$. Przez G_n oznaczamy graf, którego zbiorem wierzchołków jest zbiór wszystkich ciągów binarnych długości n, a $(i_1, \ldots, i_n)(j_1, \ldots, j_n)$ jest krawędzią w G_n, jeśli istnieje **dokładnie** jeden indeks ℓ taki, że $i_\ell \neq j_\ell$. Wyznacz $\chi'(G_n)$.

Rozwiązanie. Wyznaczymy najpierw $\Delta(G_n)$. Ustalmy $(i_1, \ldots, i_n) \in \{0,1\}^n$. Zauważmy, że dla każdego $\ell \in [n]$, istnieje dokładnie jeden sąsiad wierzchołka $(i_1, \ldots, i_n)$, który różni się od $(i_1, \ldots, i_n)$ na pozycji ℓ. Zatem stopień wierzchołka $(i_1, \ldots, i_n)$ w G_n to n. Ponieważ wybraliśmy dowolny wierzchołek grafu G_n, to jest to graf n-regularny, więc $\Delta(G_n) = n$. Ponieważ dla każdego grafu G zachodzi $\chi'(G) \geqslant \Delta(G)$, to $\chi'(G_n) \geqslant n$.

Pokażemy teraz, że $\chi'(G_n) \leqslant n$. W tym celu zdefiniujemy poprawne kolorowanie krawędziowe grafu G_n na n kolorów. Dla $\ell \in [n]$ kolorem ℓ kolorujemy takie krawędzie $(i_1, \ldots, i_n)(j_1, \ldots, j_n)$, dla których $i_\ell \neq j_\ell$ – przypomnijmy, że dla każdej krawędzi istnieje dokładnie jeden taki indeks ℓ, więc każda krawędź zostanie pokolorowana i to kolorowanie jest jednoznaczne. Ponadto, to kolorowanie jest poprawne: dla dowolnego wierzchołka $(i_1, \ldots, i_n)$ dokładnie jedna incydentna z nim krawędź jest pokolorowana kolorem ℓ. Czyli $\chi'(G_n) \leqslant n$. Zatem $\chi'(G_n) = n$, co kończy dowód. □