

1. (5p.) Niech G będzie grafem 2-spójnym i niech e, f będą dowolnymi (różnymi) krawędziami G . Pokaż, że G zawiera cykl, który przechodzi przez e i f . Przypomnijmy, że w cyklu nie powtarzają się wierzchołki (poza tym, że pierwszy jest równy ostatniemu).

Rozwiązanie. Oznaczmy $e = ab$ i $f = cd$. Graf G' otrzymujemy z G w następujący sposób:

1. dodajemy wierzchołek x i krawędzie ax, xb ,
2. dodajemy wierzchołek y i krawędzie cy, yd ,
3. usuwamy krawędzie ab i cd .

Pokażmy, że G' jest 2-spójny. Z pewnością nie jest pełny, więc należy pokazać, że dla dowolnego wierzchołka z graf $G' - z$ jest spójny. Zauważmy, że graf ten powstał z grafu G przez usunięcie jednego wierzchołka (jeśli $z \notin \{x, y\}$) lub jednej krawędzi (jeśli $z \in \{x, y\}$) a następnie zastąpienie pewnej liczby (odpowiednio, dwóch lub jednej) krawędzi ścieżkami o dwóch krawędziach. Z dwuspójności G wynika, że graf uzyskany z niego przez usunięcie dowolnego wierzchołka lub dowolnej krawędzi jest spójny. Ponieważ operacja zastąpienia krawędzi ścieżką nie zmienia spójności grafu, wnioskujemy, że $G' - z$ jest spójny.

Z zadania z ćwiczeń wiemy, że istnieje w G' cykl zawierający wierzchołki x i y . Zastępując na tym cyklu fragmenty $a-x-b$ i $c-y-d$ odpowiednio krawędziami ab i cd , otrzymujemy cykl w G , który zawiera krawędzie e i f . $\square$

2. (5p.) Niech $G = (V, E_G)$ i $H = (V, E_H)$ będą grafami eulerowskimi o tym samym zbiorze wierzchołków, V . Niech Z będzie grafem o zbiorze wierzchołków V , którego zbiór krawędzi E_Z jest różnicą symetryczną zbiorów E_G i E_H , czyli $uv \in E_Z$ wtedy i tylko wtedy, gdy uv należy do dokładnie jednego ze zbiorów E_G, E_H . Pokaż, że jeśli Z jest spójny, to jest eulerowski.

Rozwiązanie. Ponieważ graf Z jest spójny, z twierdzenia Eulera wynika, że jest on eulerowski wtedy i tylko wtedy, gdy stopień każdego wierzchołka w Z jest parzysty. Rozważmy dowolny wierzchołek v .

Z twierdzenia Eulera wiemy, że $\deg_G v$ (czyli stopień v w grafie G) i $\deg_H v$ (czyli stopień v w grafie H) są liczbami parzystymi. Niech x oznacza liczbę wierzchołków, które sąsiadują z v w obu grafach jednocześnie, czyli $|N_G(v) \cap N_H(v)|$. Zauważmy, że

$$\deg_Z v = (\deg_G v - x) + (\deg_H v - x) = \underbrace{\deg_G v}_{\text{liczba parzysta}} + \underbrace{\deg_H v}_{\text{liczba parzysta}} - \underbrace{2x}_{\text{liczba parzysta}}.$$

Suma/różnica liczb parzystych jest liczbą parzystą. Z dowolności wyboru v , kończy to dowód. □

3. (5p.) Niech $n \geq 2$ i niech G będzie grafem o n wierzchołkach takim, że dla każdej pary niesąsiadujących wierzchołków u, v zachodzi $\deg u + \deg v \geq n - 1$. Pokaż, że G ma ścieżkę Hamiltona.

Rozwiązanie. Rozważmy graf G' otrzymany z G poprzez dodanie wierzchołka z i połączenie go ze wszystkimi wierzchołkami G .

Wtedy $n' := |V(G')| = n + 1$. Pokażemy, że G' spełnia założenia twierdzenia Ore'a. Niech u, v będą dwoma wierzchołkami niesąsiadującymi w G' . Oczywiście $u, v \neq z$, bo z sąsiaduje z wszystkimi wierzchołkami. Z założenia wiemy, że $\deg_G u + \deg_G v \geq n - 1$. Ponadto, $\deg_{G'} u = \deg_G u + 1$ i $\deg_{G'} v = \deg_G v + 1$. Zatem $\deg_{G'} u + \deg_{G'} v = \deg_G u + \deg_G v + 2 \geq n - 1 + 2 = n + 1 = n'$. Czyli G' spełnia założenia twierdzenia Ore'a.

Na mocy tego twierdzenia G' jest hamiltonowski, czyli istnieje cykl w G' , który zawiera wszystkie wierzchołki G' . Po usunięciu z otrzymujemy ścieżkę, która zawiera wszystkie wierzchołki grafu G , czyli ścieżkę Hamiltona w G . $\square$

4. (5p.) Niech G będzie lasem bez izolowanych wierzchołków, takim, że $|V(G)|$ jest liczbą nieparzystą. Pokaż, że jeśli G jest niespójny, to $\chi'(\overline{G}) = \Delta(\overline{G}) + 1$.

Przypomnijmy, że przez $\overline{G}$ oznaczamy dopełnienie grafu G , czyli graf o zbiorze wierzchołków $V(G)$ i zbiorze krawędzi $\binom{V(G)}{2} \setminus E(G)$.

Rozwiązanie. Oznaczmy $|V(G)| = n$. Skoro n jest nieparzyste, to skojarzenie w grafie $\overline{G}$ może mieć zawierać maksymalnie $\frac{n-1}{2}$ krawędzi. Ponadto, skoro G nie ma wierzchołków izolowanych i jest lasem, to $\delta(G) = 1$ oraz $\Delta(\overline{G}) = n - 1 - \delta(G) = n - 2$.

Niech T będzie dowolną spójną składową G . Wówczas T jest drzewem, zatem $|E(T)| = |V(T)| - 1$. Stąd

$$|E(G)| = \sum_{T - \text{składowa } G} |V(T)| - 1 = n - \mathcal{C}(G) \leq n - 2$$

(przez $\mathcal{C}(G)$ oznaczamy liczbę składowych grafu G), co daje nam

$$|E(\overline{G})| = \binom{n}{2} - |E(G)| \geq \frac{n(n-1)}{2} - n + 2 = \frac{n^2 - 3n + 4}{2} = \frac{(n-1)(n-2)}{2} + 1.$$

Wobec tego, z dolnego ograniczenia na χ' (z ćwiczeń) mamy

$$\chi'(\overline{G}) \geq \frac{|E(\overline{G})|}{\mu(\overline{G})} \geq \frac{\frac{(n-1)(n-2)}{2} + 1}{\frac{n-1}{2}} = n - 2 + \frac{2}{n-1} > \Delta(\overline{G}),$$

co daje nam $\chi'(\overline{G}) \geq \Delta(\overline{G}) + 1$. Z twierdzenia Vizinga wynika, że $\chi'(\overline{G}) \leq \Delta(\overline{G}) + 1$, co kończy dowód. $\square$