

1. (5p.) Pokaż, że każdy graf 2-spójny o co najmniej czterech wierzchołkach ma cykl długości co najmniej 4.

Rozwiązanie 1. Jeśli G jest grafem pełnym, to stwierdzenie jest oczywiste, bo dowolne cztery wierzchołki tworzą szukany cykl. Weźmy zatem dwa niesąsiadujące wierzchołki x i y . Z ćwiczeń (i z tw. Mengera) wiemy, że w G istnieje cykl zawierający x i y . Skoro x nie sąsiaduje z y , cykl ten musi mieć co najmniej cztery wierzchołki. \square

Rozwiązanie 2. Jeśli G jest grafem pełnym, to stwierdzenie jest oczywiste, bo dowolne cztery wierzchołki tworzą szukany cykl. Zatem niech G nie będzie grafem pełnym. Niech S będzie najmniejszym zbiorem rozcinającym w G . Skoro G jest 2-spójny, w S są co najmniej dwa wierzchołki, nazwijmy je x i y . Skoro S jest rozcinający, to w $G - S$ są co najmniej dwie składowe, nazwijmy je A i B .

Zauważmy, że każdy z x, y ma sąsiada w każdym ze zbiorów $V(A)$ i $V(B)$. Gdyby tak nie było, np. x nie miałby sąsiada w $V(A)$, to $S \setminus \{x\}$ nadal byłby zbiorem rozcinającym, co przeczy temu, że S jest najmniejszy. Niech a_x, a_y oznaczają pewnych sąsiadów odpowiednio x i y w $V(A)$ i niech b_x, b_y oznaczają pewnych sąsiadów odpowiednio x i y w $V(B)$ (być może $a_x = a_y$ lub $b_x = b_y$). Skoro A jest składową, jest to graf spójny, zatem istnieje w A ścieżka P_A łącząca a_x i a_y . Analogicznie, w B istnieje ścieżka P_B łącząca b_y i b_x . Wtedy xP_AyP_B jest cyklem w G o co najmniej czterech wierzchołkach. \square

Rozwiązanie 3. Niech xy będzie dowolną krawędzią w G . Rozważmy dwa przypadki.

Przypadek 1: Każdy wierzchołek z $V(G) \setminus \{x, y\}$ sąsiaduje zarówno z x i z y . Weźmy dowolne wierzchołki $a, b \in V(G) \setminus \{x, y\}$. Wtedy $axby$ jest cyklem o czterech wierzchołkach.

Przypadek 2: Istnieje wierzchołek v , który nie sąsiaduje z x lub z y . Z twierdzenia Mengera istnieje v - $\{x, y\}$ -wachlarz, czyli dwie ścieżki, jedna z v to x , a druga z v to y , których jedynym wierzchołkiem wspólnym jest v . Zauważmy, że ścieżki te razem z krawędzią xy tworzą cykl. Skoro v nie sąsiaduje z co najmniej jednym spośród x, y , w cyklu tym są co najmniej cztery wierzchołki. \square

2. (5p.) Oznaczmy przez C_t cykl o $t \geq 3$ wierzchołkach. Dla $G = (V, E)$ i $k \geq 1$ przez G^k oznaczamy graf o zbiorze wierzchołków V i krawędziach $E(G^k) = \{uv : 0 < \text{dist}_G(u, v) \leq k\}$. Znajdź wszystkie pary liczb $t, k \in \mathbb{N}$, dla których graf C_t^k jest eulerowski.

Rozwiązanie. Ustalmy $t \geq 3$ i niech $v_0, v_1, v_2, \dots, v_{t-1}, v_0$ będzie cyklem C_t . Zauważmy, że dla każdego k graf C_t^k jest spójny i regularny, więc wystarczy zbadać parzystość $\deg_{C_t^k}(v_0)$.

Rozważmy najpierw przypadek $2k < t$, czyli równoważnie $k < t - k$. Wówczas $N_{C_t^k}(v_0) = \{v_k, v_{k-1}, \dots, v_1, v_{t-1}, \dots, v_{t-k}\}$ i zgodnie z założeniem jest to $2k$ różnych wierzchołków. W szczególności otrzymany graf jest eulerowski.

Założmy teraz, że $2k \geq t$. W takim przypadku C_t^k jest grafem pełnym o t wierzchołkach. Ponieważ graf ten jest $(t - 1)$ -regularny, jest on eulerowski dokładnie wtedy, gdy $t - 1$ jest parzyste.

W ten sposób otrzymujemy odpowiedź: warunki zadania spełniają dokładnie te pary (t, k) , dla których $t > 2k$ lub t jest nieparzyste. \square

3. (5p.) Niech $k \geq 1$. Graf G nazwiemy k -hamiltonowskim, jeśli istnieje k krawędziowo rozłącznych cykli Hamiltona w G . Udowodnij, że jeśli dla każdego $v \in V(G)$ zachodzi $\deg v \geq \frac{n+4k-4}{2}$, to G jest k -hamiltonowski.

Rozwiązanie. Indukcja po k . Dla $k = 1$ teza wynika wprost z twierdzenia Diraca, bo graf hamiltonowski jest 1-hamiltonowski. Niech teraz $k > 1$ i założmy, że teza zachodzi dla $k - 1$. Weźmy graf G taki, że stopień każdego wierzchołka w tym grafie wynosi co najmniej $\frac{n+4k-4}{2}$, zatem także co najmniej $\frac{n}{2}$. Wobec tego, ponownie z twierdzenia Diraca, graf G posiada cykl Hamiltona C . Rozważmy graf $G - E(C)$. Wtedy dla dowolnego wierzchołka v w G , $\deg_{G-E(C)} v = \deg_G v - 2 \geq \frac{n+4(k-1)-4}{2}$, więc z założenia indukcyjnego, $G - E(C)$ jest $(k - 1)$ -hamiltonowski. Zauważenie, że C jest krawędziowo rozłączny z każdym cyklem w $G - E(C)$, kończy dowód. \square

4. (5p.) Niech G będzie grafem spójnym o co najmniej dwóch wierzchołkach, który spełnia $\chi'(G) = \Delta(G)$. Pokaż, że następujące warunki są równoważne:

(a) G jest gwiazdą,

(b) dla każdej krawędzi $e \in E(G)$ mamy $\chi'(G - e) < \chi'(G)$.

Rozwiązanie. **(a) \rightarrow (b)** Niech G będzie gwiazdą o n liściach, oczywiście $\chi'(G) = n$. Po usunięciu dowolnej krawędzi otrzymujemy gwiazdę o $n - 1$ liściach i wierzchołek izolowany. Indeks chromatyczny takiego grafu wynosi $n - 1$.

(b) \rightarrow (a) Jeśli G ma dwa wierzchołki i jest spójny, to jest izomorficzny z K_2 , czyli jest gwiazdą. Załóżmy więc, że G ma co najmniej trzy wierzchołki, więc też co najmniej dwie krawędzie.

Skoro dla dowolnej krawędzi e mamy $\chi'(G - e) < \chi'(G) = \Delta(G)$, zauważamy, że $\Delta(G - e) < \Delta(G)$. Oznacza to, że krawędź e jest incydentna z *każdym* wierzchołkiem stopnia $\Delta(G)$. Z dowolności wyboru e dostajemy, że *każda* krawędź jest incydentna z *każdym* wierzchołkiem stopnia $\Delta(G)$. Skoro są co najmniej dwie krawędzie, dostajemy, że istnieje dokładnie jeden wierzchołek stopnia $\Delta(G)$ i każda krawędź jest z nim incydentna. Jedyne grafy, które spełniają te warunki, to gwiazdy. \square