1. (5p.) Niech $k \geqslant 1$. Mówimy, że graf G' jest k-rozszerzeniem grafu G, jeśli powstał z G przez dodanie nowego wierzchołka o co najmniej k sąsiadach.

Pokaż, że jeśli G jest k-spójny, to każde jego k-rozszerzenie jest k-spójne.

Rozwiązanie. Niech G' będzie k-rozszerzeniem G i niech $V(G') - V(G) = \{v\}$.

Najpierw osobno rozważmy przypadek, że G' jest grafem pełnym. Oznacza to, że G także jest grafem pełnym, a skoro jest k-spójny, to $|V(G)| > k$. Zatem G' jest grafem pełnym o więcej niż k wierzchołkach, więc jest k-spójny.

Załóżmy zatem, że G' nie jest grafem pełnym i przypuśćmy, że nie jest k-spójny, czyli ma zbiór rozcinający S rozmiaru co najwyżej $k-1$. Jeśli $v \in S$, to $S - \{v\}$ jest zbiorem rozcinającym w G liczności co najwyżej $k-2$, sprzeczność z k-spójnością G. Rozważmy zatem przypadek, że $v \notin S$. Niech A będzie składową $G' - S$ zawierającą v i niech B będzie inną składową grafdu $G' - S$ (taka istnieje, bo $G' - S$ jest niespójny). Ponieważ $\deg_{G'} v \geqslant k$, wierzchołek v ma sąsiada, który nie należy do S. Zatem $|V(A)| \geqslant 2$. Podsumowując $A - v$ i B są składowymi grafu $G - S$, zatem S jest zbiorem rozcinającym w G liczności co najwyżej $k-1$. Znowu jest to sprzeczność z k-spójnością G. □

2. (5p.) Niech G będzie grafem, w którym wszystkie wierzchołki mają stopnie parzyste i dodatnie. Wyznacz najmniejszą liczbę krawędzi, które należy dodać do G, aby uzyskać graf eulerowski (chodzi nam o graf prosty, bez pętli i wielokrotnych krawędzi).

Rozwiązanie. Zauważmy, że żadna składowa grafu G nie jest pojedynczym wierzchołkiem. Zatem zadanie polega na dodaniu jak najmniejszej liczby krawędzi, które sprawią, że otrzymany graf będzie spójny, a przy tym zachowana zostanie parzystość stopni. W szczególności, każdy wierzchołek musi być incydentny z parzystą liczbą nowych krawędzi. Zatem w szczególności dodane krawędzie będą indukowały graf o minimalnym stopniu co najmniej 2.

Szukana liczba krawędzi zależy od liczby składowych grafu G, oznaczmy ją przez k.

Jeśli $k = 1$, to nie trzeba dodawać żadnych krawędzi, bo graf jest już eulerowski.

Jeśli $k \geqslant 3$, należy dodać k krawędzi. Wybierzmy wierzchołki $v_1, v_2, \ldots, v_k$, po jednym w każdej składowej, i dodajmy krawędzie $v_1v_2, v_2v_3, \ldots, v_{k-1}v_k, v_kv_1$. Oczywiście otrzymany graf jest eulerowski. Z drugiej strony nie da się dodać mniej krawędzi: w każdej z k składowych musi być wierzchołek incydentny z nową krawędzią, a minimalna liczba krawędzi w grafie o co najmniej k wierzchołkach i minimalnym stopniu co najmniej 2 wynosi k.

Na końcu rozważmy przypadek, że $k = 2$, niech A i B będą składowymi grafu G. Osobno rozważmy dwa podprzypadki: albo któryś z grafów A, B nie jest pełny, albo oba są pełne.

Przypuśćmy, że A nie jest grafem pełnym. Wtedy należy dodać trzy krawędzie. Wybierzmy dwa niesąsiadujące wierzchołki a_1, a_2 z A oraz wierzchołek b z B i dodajmy krawędzie a_1a_2, a_1b i a_2b. Dlaczego nie można dodać mniej krawędzi? Minimalna liczba krawędzi w grafie o najmniejszym stopniu co najmniej dwa wynosi 3.

Jeśli oba grafy A i B są pełne, należy dodać cztery krawędzie. Wybierzmy dwa wierzchołki a_1, a_2 z A i dwa wierzchołki b_1, b_2 z B, i dodajmy krawędzie a_ib_j dla $i, j \in \{1, 2\}$. Oczywiście otrzymany graf jest eulerowski. Dlaczego nie da się dodać mniej krawędzi? Zauważmy, że skoro finalny graf ma być prosty, możemy dodawać tylko krawędzie pomiędzy A i B, więc dodane krawędzie będą indukowały graf dwudzielny. Z drugiej strony, najmniejszy graf dwudzielny o minimalnym stopniu 2 ma cztery krawędzie (jest to cykl C_4). $\square$

3. (5p.) Przez $K_{a,b,c}$ oznaczmy graf, którego zbiór wierzchołków jest podzielony na trzy podzbiory A, B, C o licznościach odpowiednio a, b i c, a dwa wierzchołki są połączone krawędzią wtedy i tylko wtedy, gdy należą do różnych podzbiorów.

Niech $n \geqslant 1$. Zbadaj, czy grafy $K_{n,2n,3n}$ i $K_{n,2n,3n+1}$ są hamiltonowskie.

Rozwiązanie. Najpierw pokażemy, że graf $K_{n,2n,3n}$ jest hamiltonowski. Wprowadźmy oznaczenia

$$\begin{aligned} A =& \{a_1, a_2, \dots, a_n\} \\ B =& \{b_1, b_2, \dots, b_{2n}\} \\ C =& \{c_1, c_2, \dots, c_{3n}\}. \end{aligned}$$

Zauważmy, że ciąg wierzchołków

$$c_1, a_1, c_2, a_2, \dots, c_n, a_n, c_{n+1}, b_1, c_{n+2}, b_2, \dots, c_{3n}, b_{2n}, c_1$$

wyznacza cykl Hamiltona w $K_{n,2n,3n}$.

Teraz pokażemy, że graf $K_{n,2n,3n+1}$ nie jest hamiltonowski. Zauważmy, że $|A \cup B| = 3n$, a graf $K_{n,2n,3n+1} - (A \cup B)$ ma $3n + 1$ składowych (pojedyncze wierzchołki). Zatem ten graf nie spełnia warunku koniecznego na istnienie cyklu Hamiltona. $\square$

4. (5p.) Przypomnijmy, że dla grafu G, graf G^2 ma zbiór wierzchołków $V(G)$, a dwa wierzchołki są połączone krawędzią, jeśli G są w odległości co najwyzej 2.

Pokaż, że $\chi'(G^2) \leqslant \chi'(G)^2 + 1$.

Rozwiązanie. Oznaczmy $\Delta := \Delta(G)$.

Rozważmy dowolny wierzchołek v grafu G. Przez $N(v)$ oznaczmy zbiór sąsiadów v w G, zaś przez $N^2(v)$ zbiór wierzchołków oddalonych od v o 2 (także w grafie G).

Zauważmy, że $\deg_{G^2} v = |N(v) \cup N_2(v)|$. Oczywiście mamy $|N(v)| \leqslant \Delta$. Ponadto każdy wierzchołek z $N^2(v)$ ma w grafie G sąsiada w $N(v)$, a każdy wierzchołek z $N(v)$ ma w grafie G co najwyżej $\Delta - 1$ sąsiadów w $N^2(v)$ (jego stopień wynosi co najwyżej Δ, ale na pewno sąsiaduje też z v). Zatem $|N^2(v)| \leqslant |N(v)|(\Delta - 1) \leqslant \Delta(\Delta - 1)$, a więc $\deg_{G^2} v \leqslant \Delta + \Delta(\Delta - 1) = \Delta^2$. Z dowolności wyboru wierzchołka v otrzymujemy, że $\Delta(G^2) \leqslant \Delta^2$.

Zatem, korzystając z twierdzenia Vizinga dostajemy

$$\chi'(G^2) \leqslant \Delta(G^2) + 1 \leqslant \Delta^2 + 1 \leqslant \chi'(G)^2 + 1.$$

To kończy dowód. $\square$