1. (5p.) Niech $G = (V, E)$ będzie grafem. Pokaż, że następujące warunki są równoważne.

(1.) Dla każdych $u, v \in V$ takich, że $uv \notin E$, zachodzi $\chi(G') > \chi(G)$, gdzie $G' := (V, E \cup \{uv\})$.

(2.) Dla każdych $u, v \in V$ zachodzi dokładnie jedno: $uv \in E$ albo $N(u) = N(v)$.

Przypomnijmy, że przez $N(v)$ oznaczamy zbiór sąsiadów wierzchołka v.

Rozwiązanie. Załóżmy najpierw, że zachodzi (1.) i ustalmy poprawne kolorowanie $c : V \to [\chi(G)]$ grafu G na $\chi(G)$ kolorów. Rozważmy wierzchołek $v \in V$ i niech $U(v)$ będzie zbiorem wierzchołków u, dla których zachodzi $c(u) \neq c(v)$. Zauważmy, że $N(v) \subseteq U(v)$.

Rozważmy $u \in U(v)$. Jeśli $uv \notin E$, to wtedy c jest także poprawnym kolorowaniem grafu $G' = (V, E \cup \{uv\})$ na $\chi(G)$ kolorów – sprzeczność z (1.). Zatem każdy wierzchołek $u \in U(v)$ sąsiaduje z v, czyli $N(v) = U(v)$.

Stąd wszystkie wierzchołki $v' \notin N(v)$ spełniają $c(v') = c(v)$, czyli też $U(v) = U(v')$. Wynika z tego, że

$$N(v) = U(v) = U(v') = N(v'),$$

czyli (2.) zachodzi.

Załóżmy teraz, że (2.) zachodzi. Przypuśćmy, że (1.) nie zachodzi, czyli, że istnieją takie $u, v \in V$, że $uv \notin E$ oraz dla grafu $G' := (V, E \cup \{uv\})$ mamy $\chi(G') = \chi(G)$. Ustalmy poprawne kolorowanie c grafu G' na $\chi(G)$ kolorów. Zbiór V możemy podzielić na dwa rozłączne zbiory $N(u)$ i $N'(u) := \{w : \ uw \notin E\}$. W szczególności $u, v \in N'(u)$.

Z (2.) możemy także zaobserwować, że dla każdego $w \in N'(u)$ zachodzi $N(w) = N(u)$. Zauważmy też, że $N'(u)$ jest zbiorem niezależnym: jeśli $w, w' \in N'(u)$ sąsiadują, więc $w \in N(w')$, to skoro $N(w) = N(u) = N(w')$, mamy $w \in N(w)$, sprzeczność.

Ponieważ c jest poprawnym kolorowaniem G', to $c(u) \neq c(v)$. Zatem liczność zbioru $c[N(u)] = c[N(v)]$ nie może przekraczać $\chi(G) - 2$, ponieważ wierzchołki z $N(u)$ sąsiadują jednocześnie z u i v, które mają już dwa różne kolory. Oczywiście $c(u) \notin c[N(u)]$. Ale wtedy możemy zdefiniować kolorowanie c' grafu G w taki sposób, że dla $w \in N(u)$ mamy $c'(w) := c(w)$, a dla wierzchołków $w \in N'(u)$, mamy $c'(w) := c(u)$. Jest to poprawne kolorowanie grafu G na co najwyżej $\chi(G) - 2 + 1 = \chi(G) - 1$ kolorów – sprzeczność. $\square$

2. (5p.) Zbadaj, dla jakich $n \geqslant 3$, graf $\overline{C_n}$ jest planarny.

Rozwiązanie. Najpierw pokażemy, że dla $n \geqslant 8$, graf $\overline{C_n}$ nie jest planarny. Istotnie, zauważmy, że

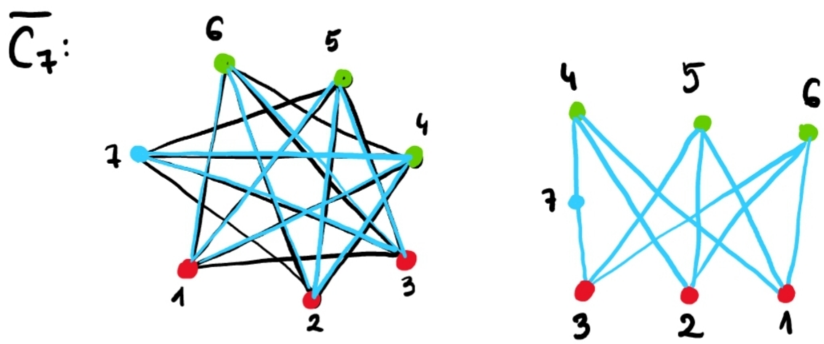
$$|E(\overline{C_n})| = \binom{n}{2} - n = \frac{n^2 - 3n}{2}.$$

Jeśli $\overline{C_n}$ jest planarny, wówczas $|E(\overline{C_n})| \leqslant 3n - 6$. Zatem

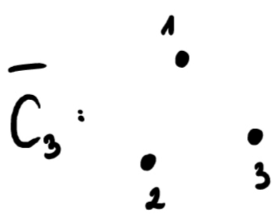
$$\frac{n^2 - 3n}{2} \leqslant 3n - 6,$$
$$n^2 - 9n + 12 \leqslant 0.$$

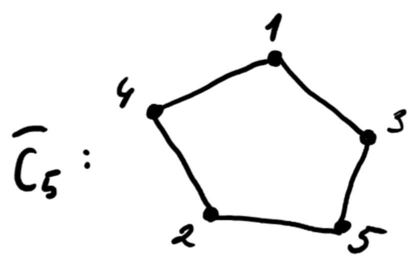
Powyższa nierówność jest prawdziwa wtedy i tylko wtedy, gdy $n \geqslant 2$ oraz $n \leqslant 7$, sprzeczność.

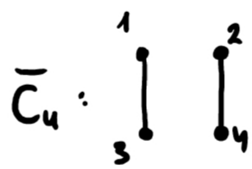
Na mocy twierdzenia Kuratowskiego, graf $\overline{C_7}$ również nie jest planarny, ponieważ możemy w nim znaleźć podpodział $K_{3,3}$:

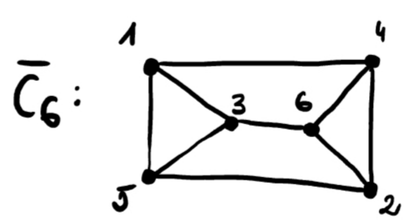


W pozostałych przypadkach, gdy $3 \leqslant n \leqslant 6$, graf $\overline{C_n}$ jest planarny (liczby oznaczają kolejne wierzchołki cyklu C_n):









□

3. (5p.) Niech $n > 1$ i niech X będzie dowolnym zbiorem liczności n. Zdefiniujmy graf

$$G := (2^X, \{AB : A \cap B = \emptyset\}),$$

czyli graf, którego wierzchołkami są wszystkie podzbiory zbioru X, a wierzchołki A i B sąsiadują ze sobą wtedy, gdy są rozłącznymi podzbiorami zbioru X.

Zbadaj, czy graf G jest dwudzielny oraz pokaż, że ma skojarzenie doskonałe.

Rozwiązanie. Niech $x \neq y$ będą elementami zbioru X. Możemy takie elementy wybrać, bo $n > 1$. Wtedy $\{\emptyset, \{x\}, \{y\}\}$ indukuje trójkąt w G, a zatem graf G nie jest dwudzielny.

Niech $W := \{A \in V(G) : |A| \leqslant \lfloor \frac{n}{2} \rfloor\}$. Rozważmy zbiór par

$$M := \{\{A, X - A\} : A \in W\}.$$

Po pierwsze zauważmy, że ze względu na to, że zbiór jest zawsze rozłączny ze swoim dopełnieniem, każdy element zbioru M jest krawędzią w grafie G. Co więcej, M jest skojarzeniem w G. Dla n nieparzystego wynika to natychmiast z faktów, że dopełnienia różnych zbiorów są różne oraz że dopełnienie żadnego zbioru z W nie należy do W. Dla n parzystego i zbioru A liczności $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor = \frac{n}{2}$ (a więc należącego do W) zachodzi $X - A \in W$, ale ze względu na to, że $X - (X - A) = A$ również w tym przypadku zbiór M jest skojarzeniem.

Skojarzenie M jest skojarzeniem doskonałym, gdyż dla $B \notin W$ zachodzi $X - B \in W$. $\square$

4. (5p.) Niech $N = (G, c, s, t)$ będzie siecią, w której dla każdego łuku $a \in A(G)$ wartość $c(a)$ jest parzysta.
a) Pokaż, że wartość największego przepływu jest parzysta.
b) Pokaż, że w N istnieje największy przepływ f, w którym dla każdego $a \in A(G)$ wartość $f(a)$ jest parzysta.

Rozwiązanie.
a) Z twierdzenia Forda-Fulkersona wiemy, że wartość największego przepływu f^* jest równa przepustowości najmniejszego przekroju K^*. Otrzymujemy zatem, że $\mathsf{val} f^* = \mathsf{cap} K = \sum_{a\in K} c(a)$. Jako suma liczb parzystych, wartość $\mathsf{val} f^*$ jest parzysta.

Uwaga: Tak naprawdę a) łatwo wynika z b), bo wartość przepływu, o którym mowa w b) jest parzysta.

b) Zdefiniujmy $c' : A(G) \to [0, \infty)$ jako $c'(a) = c(a)/2$ dla każdego $a \in A(G)$. Z założenia o c wiemy, że c' przyjmuje wartości nieujemne i całkowite. Oznaczmy $N' = (G, c', s, t)$.

Niech f' będzie największym przepływem w sieci N'. Zdefiniujmy $f : A(G) \to [0, \infty)$ jako $f(a) = 2f'(a)$ dla każdego $a \in A(G)$. Zauważmy, że f jest przepływem:

1. dla każdego $a \in A(G)$ mamy $f(a) = 2f'(a) \geqslant 0$, ponieważ $f'(a) \geqslant 0$,
2. dla każdego $a \in A(G)$ mamy $f(a) = 2f'(a) \leqslant 2c'(a) = c(a)$, ponieważ $f'(a) \leqslant c'(a)$,
3. dla każdego $v \notin \{s, t\}$ mamy

$$\begin{aligned} f^+(v) = \sum_{vu\in A(G)} f(vu) &= \sum_{vu\in A(G)} 2f'(vu) = 2 \sum_{vu\in A(G)} f'(vu) = 2(f')^+(v) \\ &= 2(f')^-(v) = 2 \sum_{uv\in A(G)} f'(uv) = \sum_{uv\in A(G)} 2f'(uv) = \sum_{uv\in A(G)} f(uv) = f^-(v), \end{aligned}$$

ponieważ f' spełnia warunek Kirchhoffa.

Co więcej, f przyjmuje tylko wartości parzyste. Pozostało pokazać, że f jest największym przepływem.

Ponieważ sieci N i N' mają te same wierzchołki, krawędzie, źródło i ujście, każdy przekrój w N' jest też przekrojem w N i odwrotnie. Aby uniknąć wątpliwości, przez $\mathsf{cap}' K$ będziemy oznaczać przepustowość przekroju K względem funkcji przepustowości c', a przez $\mathsf{cap} K$ przepustowość względem funkcji c.

Zauważmy, że $\mathsf{val} f = \sum_{sv\in A(G)} f(sv) = \sum_{sv\in A(G)} 2f'(sv) = 2\sum_{sv\in A(G)} f'(sv) = 2\mathsf{val} f'$. Rozważmy najmniejszy przekrój K w N', z twierdzenia Forda-Fulkersona wiemy, że $\mathsf{cap}' K = \mathsf{val} f'$. Z drugiej strony,

$$\mathsf{cap} K = \sum_{a\in K} c(a) = \sum_{a\in K} 2c'(a) = 2\sum_{a\in K} c'(a) = 2\mathsf{cap}' K = 2\mathsf{val} f' = \mathsf{val} f.$$

Z własności z wykładu wiemy, że jeśli wartość pewnego przepływu jest równa przepustowości pewnego przekroju, to przepływ ten jest największy. Zatem przepływ f spełnia założenia zadania. $\square$