1. (5p.) Niech $\mathcal{G}$ będzie najmniejszą klasą grafów o następujących własnościach:

1. Graf K_1 należy do $\mathcal{G}$,
2. Jeśli $G = (V, E) \in \mathcal{G}$ to G z dodanym wierzchołkiem izolowanym v należy do $\mathcal{G}$ (tzn. $(V \cup \{v\}, E) \in \mathcal{G}$),
3. Jeśli $G = (V, E) \in \mathcal{G}$ to G z dodanym wierzchołkiem uniwersalnym v należy do $\mathcal{G}$ (tzn. $(V \cup \{v\}, E \cup \{uv \ : \ u \in V\}) \in \mathcal{G}$).

Pokaż, że dla każdego $G \in \mathcal{G}$ zachodzi $\chi(G) = \omega(G)$, gdzie $\omega(G)$ oznacza rozmiar największej kliki w G.

Rozwiązanie. Indukcja po liczbie wierzchołków grafu G. Jeśli $|V(G)| = 1$, to $G = K_1$, a $\omega(K_1) = 1 = \chi(K_1)$.

Załóżmy więc, że dla każdego grafu $G' \in \mathcal{G}$ o $n-1$ wierzchołkach (gdzie $n > 1$) zachodzi $\chi(G') = \omega(G')$ i rozważmy graf $G \in \mathcal{G}$ o n wierzchołkach. Ponieważ $\mathcal{G}$ jest najmniejszą (w sensie inkluzji) klasą grafów, która spełnia warunki 1.-3., istnieje graf $G' \in \mathcal{G}$ o $n-1$ wierzchołkach, taki że G' powstaje z G poprzez usunięcie pewnego wierzchołka v, który jest w G izolowany lub uniwersalny. Istotnie, w przeciwnym wypadku $\mathcal{G} - \{G\}$ byłoby mniejszą klasą spełniającą warunki 1.-3., co daje sprzeczność z minimalnością $\mathcal{G}$.

Rozważymy dwa przypadki.

1) v jest izolowany. Zauważmy, że dodanie izolowanego wierzchołka nie wpływa na liczbę klikową grafu, więc $\omega(G) = \omega(G')$. Nie wpływa też na liczbę chromatyczną grafu, zawsze możemy rozszerzyć poprawne $\chi(G')$-kolorowanie grafu G' na v, przypisując mu dowolny z już użytych kolorów. Otrzymujemy, że $\chi(G') = \chi(G)$. Z założenia indukcyjnego wiemy, że $\chi(G') = \omega(G')$, dostajemy więc $\chi(G) = \omega(G)$.

2) v jest uniwersalny. Oczywiście $\chi(G) \leqslant \chi(G') + 1$ (*), ponieważ zawsze możemy rozszerzyć poprawne $\chi(G')$-kolorowanie grafu G' na v, przypisując mu nowy kolor.

Pokażemy, że $\omega(G) = \omega(G') + 1$ (**). Jeśli zbiór $K' \subseteq V(G')$ był kliką w G' o rozmiarze $\omega(G')$, zbiór $K' \cup \{v\}$ jest kliką w G o rozmiarze $\omega(G') + 1$, co dowodzi, że $\omega(G) \geqslant \omega(G') + 1$. Z drugiej strony, jeśli zbiór K jest kliką w G o rozmiarze $\omega(G)$, wówczas $v \in K$. W przeciwnym wypadku zbiór $K \cup \{v\}$ byłby kliką w G o rozmiarze $\omega(G) + 1$, sprzeczność z definicją $\omega(G)$. Skoro $v \in K$, wówczas zbiór $K \setminus \{v\}$ jest kliką w G' o rozmiarze $\omega(G) - 1$, co dowodzi, że $\omega(G') + 1 \geqslant \omega(G)$.

Z (*), (**) i z założenia indukcyjnego wynika, że $\chi(G) \leqslant \chi(G') + 1 = \omega(G') + 1 = \omega(G)$. Z drugiej strony, liczba chromatyczna grafu musi być zawsze większa lub równa liczbie klikowej, tzn. $\chi(G) \geqslant \omega(G)$. Otrzymujemy, że $\chi(G) = \omega(G)$, co kończy dowód drugiego przypadku. $\square$

2. (5p.) Niech G będzie spójnym grafem 4-regularnym. Załóżmy, że istnieje jego rysunek płaski, w którym każda krawędź należy do dokładnie jednej ściany stopnia 3 i dokładnie jednej ściany stopnia 5. Wyznacz, ile ścian stopnia 3 ma G.

Rozwiązanie. Oznaczmy przez n i m odpowiednio liczbę wierzchołków i krawędzi w grafie G, przez t i p, odpowiednio, liczbę ścian stopnia 3 i liczbę ścian stopnia 5, oraz przez f liczbę wszystkich ścian w G. Z założenia $f = t + p$. Skoro każda krawędź należy do dokładnie jednej ściany stopnia 3, a każda ściana stopnia 3 jest ograniczona dokładnie trzema krawędziami, dostajemy, że $m = 3t$. Podobnie, skoro każda krawędź należy do dokładnie jednej ściany stopnia 5, a każda ściana stopnia 5 jest ograniczona dokładnie pięcioma krawędziami, $m = 5p$. Z tego dostajemy

$$f = t + p = \frac{m}{3} + \frac{m}{5} = \frac{8m}{15}.$$

Dodatkowo, graf jest 4-regularny, więc z lematu o uściskach dłoni wiemy, że $4n = 2m$, więc $n = \frac{m}{2}$. Wstawiając to wszystko do wzoru Eulera $m = n + f - 2$ dostajemy:

$$m = \frac{m}{2} + \frac{8m}{15} - 2.$$

Z tego wyliczamy, że $m = 60$, więc $t = \frac{m}{3} = 20$. □

Nie jest to istotne dla rozwiązania zadania, ale co najmniej jeden graf o podanych własnościach faktycznie istnieje, to dwudziesto-dwunastościan: `https://en.m.wikipedia.org/wiki/Icosidodecahedron`.

3. (5p.) Niech G będzie grafem dwudzielnym o klasach dwudzielności X, Y, gdzie dla każdego $x \in X$ mamy $\deg x \geqslant 1$. Pokaż, że w G^2 istnieje skojarzenie pokrywające X.

Rozwiązanie (1). Indukcja po $|X|$. Jeśli $|X| = 0$, puste skojarzenie spełnia warunki zadania. Jeśli $|X| = 1$, powiedzmy $X = \{x\}$, szukane skojarzenie istnieje, bo x ma jakiegoś sąsiada w Y (z założenia o stopniu). Załóżmy zatem, że $|X| \geqslant 2$ i twierdzenie zachodzi dla wszystkich dla wszystkich grafów, które w rozważanej klasie dwudzielności mają mniej niż $|X|$ wierzchołków i nie mają w niej wierzchołków izolowanych.

Jeśli G ma skojarzenie pokrywające X, jest to też skojarzenie pokrywające X w G^2 i twierdzenie jest udowodnione. Pozostało więc rozważyć przypadek, że w G nie ma skojarzenia pokrywającego X. Na podstawie twierdzenie Halla oznacza to, że istnieje zbiór $S \subseteq X$, dla którego $|N_G(S)| < |S|$. Ponieważ każdy wierzchołek z S ma jakiegoś sąsiada w Y (z założenia o stopniach), warunek $|N_G(S)| < |S|$ implikuje, że istnieją wierzchołki $x, x' \in S$, które mają wspólnego sąsiada w Y. Oznacza to, że wierzchołki x, x' są połączone krawędzią w G^2.

Rozważmy zatem graf $G' := G - \{x, x'\}$ i niech $X' := X \setminus \{x, x'\}$. Ponieważ G' jest dwudzielny, każdy wierzchołek z X' ma sąsiada w G' i $|X'| = |X| - 2 < |X|$, z założenia indukcyjnego otrzymujemy, że w G'^2 istnieje skojarzenie pokrywające X'. Dokładając do tego skojarzenia krawędź xx' otrzymujemy skojarzenie w G^2, które pokrywa zbiór X. To kończy dowód. □

Rozwiązanie (2) – dominujące wśród rozwiązań studentów. Oznaczmy wierzchołki z Y jako $\{y_1, \ldots, y_p\}$. Dla każdego $i \in [p]$ zdefiniujmy zbiór

$$X_i := N_G(y_i) \setminus \bigcup_{j<j} N_G(y_j),$$

czyli każdy wierzchołek z X przypisujemy do zbioru z indeksem jego najwcześniejszego sąsiada w Y. Z definicji zbiory X_i są parami rozłączne oraz pokrywają cały zbiór X, ponieważ każdy wierzchołek $x \in X$ ma jakiegoś sąsiada w Y. Zauważmy, że każde dwa wierzchołki z X_i mają w G wspólnego sąsiada (y_i), więc każdy taki zbiór indukuje w G^2 klikę.

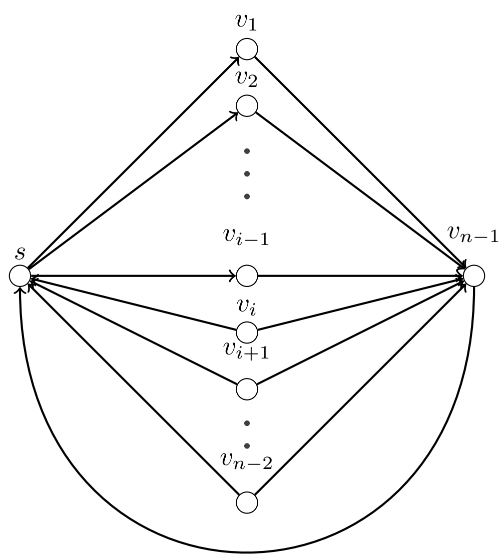
Dla każdego i zdefiniujemy skojarzenie M_i pokrywające X_i. Jeśli $|X_i|$ jest parzyste, wierzchołki z X_i możemy dowolnie połączyć w pary. Rozważmy zatem przypadek, że $|X_i|$ jest nieparzyste. Ponieważ y_i sąsiaduje ze wszystkimi wierzchołkami z X_i, zbiór $X_i \cup \{y_i\}$ indukuje w G^2 klikę i jest to klika o parzystej liczbie wierzchołków. Zatem podobnie jak w poprzednim przypadku możemy podzielić te wierzchołki w pary i otrzymać skojarzenie M_i pokrywające $X_i \cup \{y_i\}$. Ponieważ zbiory $X_i \cup \{y_i\}$ są parami rozłączne, otrzymujemy, że $M = \bigcup_{i \in [p]} M_i$ jest skojarzeniem. Pokrywa ono $\bigcup_{i \in [p]} X_i = X$, co kończy dowód. □

4. (5p.) Niech $n \geqslant 3$. Pokaż, że dla każdego $i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ istnieje sieć (G, c, s, t), która spełnia następujące własności:
1) $|V(G)| = n$,
2) dla każdej pary $u, v \in V(G), u \neq v$ zachodzi dokładnie jedno: $(u, v) \in A(G)$ albo $(v, u) \in A(G)$,
3) dla każdego łuku $a \in A(G)$, zachodzi $c(a) = 1$,
4) wartość największego przepływu w tej sieci wynosi dokładnie i.

Rozwiązanie. Ustalmy $i \in \{0, \ldots, n-1\}$. Zbiór wierzchołków grafu G oznaczmy jako $\{v_1, \ldots, v_{n-1}, s\}$, natomiast zbiór łuków jest definiujemy następująco:

- dla każdego $v \in \{v_1, \ldots, v_{n-2}\}$ mamy $(v, v_{n-1}) \in A(G)$,
- dla każdego $v \in \{v_1, \ldots, v_i\}$ mamy $(s, v) \in A(G)$,
- dla każdego $v \in \{v_{i+1}, \ldots, v_{n-1}\}$ mamy $(v, s) \in A(G)$.

Dla pozostałych par wierzchołków łuki kierujemy dowolnie tak, aby spełniony był warunek 2) z treści zadania. Przepustowość c każdego łuku definiujemy jako 1. To kończy konstrukcję sieci (G, c, s, v_{n-1}).



Zauważmy, że sieć (G, c, s, v_{n-1}) spełnia warunki 1)-3). Pozostaje pokazać, że wartość największego przepływu w skonstruowanej sieci wynosi i.

Zdefiniujmy przepływ f w taki sposób, że dla każdego $j \leqslant i$ wartość f na łuku (s, v_j) i, jeśli $j \neq n-1$, to także wartość na łuku (v_j, v_{n-1}) jest równa 1, a na wszystkich pozostałych 0. Jedyne wierzchołki w $V(G) \setminus \{s, v_{n-1}\}$ incydentne z łukami z niezerową wartością f to $v_1, \ldots, v_{n-2}$ i do każdego z tych wierzchołków wchodzi dokładnie jeden łuk z wartością 1 w f i dokładnie jeden taki łuk wychodzi. Zatem spełniony jest warunek Kirchoffa. Oczywiście dla każdego łuku $a \in A(G)$ zachodzi $0 \leqslant f(a) \leqslant c(a)$. Wynika stąd, że f jest przepływem. Wartość tego przepływu to $f^+(s) - f^-(s) = i - 0 = i$.

Rozważmy teraz przekrój $(\{s\}, V(G) - \{s\})$, jego przepustowość to liczba krawędzi wychodzących z s, czyli i – tyle samo ile wartość przepływu f. Na mocy twierdzenia z wykładu, jeśli w sieci istnieje przepływ f i przekrój K, dla których $\operatorname{val} f = \operatorname{cap} K$, to f jest największym przepływem (a K najmniejszym przekrojem). To kończy dowód.