1. (5p.) Dla liczb naturalnych $n \geqslant k \geqslant 1$, przez $G(n,k)$ oznaczamy graf, którego wierzchołkami są k-elementowe podzbiory zbioru $[n] = \{1, \ldots, n\}$, a para zbiorów różnych X, Y jest połączona krawędzią wtedy i tylko wtedy, gdy $\max X = \max Y$. Wyznacz $\chi(G(n,k))$ i zdefiniuj optymalne kolorowanie wierzchołkowe.

Rozwiązanie. Pokażemy, że $\chi(G(n,k)) = \binom{n-1}{k-1}$.

Najpierw zauważmy, że wszystkie zbiory zawierające element n tworzą klikę w grafie – ich największym elementem jest n. Zbiorów takich jest $\binom{n-1}{k-1}$, zatem $\chi(G(n,k)) \geqslant \binom{n-1}{k-1}$.

Dla $X \in V(G(n,k))$, przez X' oznaczmy zbiór $X \setminus \{\max X\}$. Zauważmy, że dla każdego X, zbiór X' jest $(k-1)$-elementowym podzbiorem zbioru $[n-1] = \{1, \ldots, n-1\}$, bo jeśli $n \in X$, to $n = \max X$. Teraz zdefiniujmy kolorowanie f wierzchołków grafu na $\binom{n-1}{k-1}$ kolorów. Kolory będziemy utożsamiać z $(k-1)$-elementowymi podzbiorami zbioru $[n-1]$. Dla każdego $X \in V(G(n,k))$ definiujemy $f(X) = X'$.

Przypuśćmy, że f nie jest poprawnym kolorowaniem, czyli istnieją dwa różne zbiory X, Y, takie, że (i) $XY \in E(G(n,k))$ i (ii) $f(X) = f(Y)$. Z (i) wynika, że $\max X = \max Y$. Z (ii) wynika, że $X' = Y'$, czyli $X \setminus \{\max X\} = Y \setminus \{\max Y\}$. Podsumowując, otrzymujemy $X = Y$, sprzeczność. Zatem $\chi(G(n,k)) \leqslant \binom{n-1}{k-1}$.

Łącząc oba ograniczenia, otrzymujemy $\chi(G(n,k)) = \binom{n-1}{k-1}$. $\square$

2. (5p.) Niech M i M' będą maksymalnymi skojarzeniami w grafie G. Pokaż, że $|M| \leqslant 2|M'|$.

Przypomnijmy, że skojarzenie M jest maksymalne, jeśli dla dowolnej krawędzi $e \notin M$, zbiór $M \cup \{e\}$ nie jest skojarzeniem.

Rozwiązanie. Oznaczmy $|M| = a$ i $|M'| = b$. Przypuśćmy, że $a > 2b$. Niech X oznacza zbiór wierzchołków incydentnych z krawędziami z M', oczywiście $|X| = 2b$. Ponieważ krawędzie w M są parami rozłączne, istnieje w M krawędź e, która nie zawiera żadnego wierzchołka z X. Wtedy $M' \cup \{e\}$ jest skojarzeniem, sprzeczność z maksymalnością M'. $\square$

3. (5p.) Niech $k \geqslant 3$. Dla sieci $N = (G, c, s, t)$ i zbioru łuków $C \subseteq A(G)$ o niezerowych przepustowościach, który indukuje skierowany cykl długości k, przez N' oznaczamy sieć powstałą z N przez zmniejszenie o 1 przepustowości na każdym łuku z C. Oznaczmy odpowiednio przez f i f' największe przepływy w N i N'. Pokaż, że $\operatorname{val} f - \operatorname{val} f' \leqslant \lfloor \frac{k}{2} \rfloor$.

Rozwiązanie. Zauważmy, że sieci N i N' mają dokładnie ten sam zbiór przekrojów ($\star$). Rozważmy dowolny przekrój $(S, \overline{S})$ w N'. Niech U będzie zbiorem wierzchołków incydentnych z C, oznaczmy też $U_1 = U \cap S, U_2 = U \cap \overline{S}$. Zauważmy, że zachodzi $|U_1| \leqslant \lfloor \frac{k}{2} \rfloor$ lub $|U_2| \leqslant \lfloor \frac{k}{2} \rfloor$.

Ponieważ do każdego wierzchołka z U wchodzi dokładnie jedna krawędź z C i wychodzi dokładnie jedna krawędź z C, przekrój $(S, \overline{S})$ zawiera co najwyżej $\lfloor \frac{k}{2} \rfloor$ łuków z C. Zatem przepustowość $(S, \overline{S})$ w N może być większa co najwyżej o $\lfloor \frac{k}{2} \rfloor$ od przepustowości $(S, \overline{S})$ w N'. Z dowolności $(S, \overline{S})$ i własności ($\star$) otrzymujemy, że przepustowość najmniejszego przekroju w N' jest mniejsza co najwyżej o $\lfloor \frac{k}{2} \rfloor$ od przepustowości najmniejszego przekroju w N. Zatem korzystając twierdzenia Forda-Fulkersona wartość największego przepływu w N' jest mniejsza co najwyżej o $\lfloor \frac{k}{2} \rfloor$ od wartości największego przepływu w N, co kończy dowód. $\square$

4. (5p.) Niech T będzie drzewem. Pokaż, że jego graf krawędziowy $L(T)$ jest planarny wtedy i tylko wtedy, gdy $\Delta(T) \leqslant 4$.

Przypomnijmy, że przez $L(T)$ oznaczamy graf o zbiorze wierzchołków $E(T)$ taki że $e, f \in E(T)$ tworzą krawędź w $L(T)$ jeśli mają wspólny koniec w T.

Rozwiązanie. Dla wierzchołka $v \in V(T)$ niech Q_v oznacza zbiór krawędzi incydentnych z v. Z definicji grafu $L(T)$ wiemy, że dla każdego $v \in V(T)$ zbiór Q_v tworzy klikę w $L(T)$ oraz że $|Q_v| = \deg_T v$.

($\Rightarrow$) Załóżmy, że $L(T)$ jest planarny. W szczególności, z twierdzenia Kuratowskiego wynika, że $L(T)$ nie zawiera K_5. Skoro tak, to dla każdego $v \in V(T)$ mamy $\deg_T v = |Q_v| \leqslant 4$.

($\Leftarrow$) Załóżmy, że $\Delta(T) \leqslant 4$. Przypuśćmy, że $L(T)$ nie jest planarny, czyli, z twierdzenia Kuratowskiego, zawiera jako podgraf podpodział grafu K_5 lub $K_{3,3}$. Ustalmy taki podgraf w $L(T)$ i oznaczmy go przez H, a przez $W \subseteq V(H)$ oznaczmy zbiór wierzchołków, które są stopnia co najmniej 3 w H. Oczywiście $|W| \geqslant 5$. Zauważmy, że grafy K_5 i $K_{3,3}$ są dwuspójne, czyli dla każdej pary wierzchołków istnieje cykl, który je zawiera. Wynika z tego, że dla każdych dwóch wierzchołków $x, y \in W$ istnieje w H cykl $C_{x,y}$, który zawiera x i y: otrzymujemy go zastępując każdą krawędź w analogicznym cyklu w K_5 lub $K_{3,3}$ przez odpowiadającą mu ścieżkę w grafie H.

Pokażemy, że każde dwa wierzchołki $x, y \in W \subseteq E(T)$ mają wspólny koniec w T. Załóżmy przeciwnie, czyli $xy \notin E(L(T))$. Skoro T jest drzewem, istnieje w T dokładnie jedna ścieżka P, której pierwszą krawędzią jest x, a ostatnią y. Ponieważ x i y nie mają wspólnego końca, to P zawiera co najmniej jedną inną krawędź, nazwijmy ją e. Skoro T jest drzewem, e jest mostem w T oraz x i y należą do różnych składowych $T - e$ ($\star$).

Zauważmy, że e jest również wierzchołkiem rozcinającym w $L(T)$, takim że x i y należą do różnych składowych $L(T) - e$; nazwijmy te składowe S_x i S_y. Istotnie, w przeciwnym wypadku istnieje w $L(T) - e$ ścieżka od x do y, która odpowiada x-y-spacerowi w $T - e$, co przeczy ($\star$). Przypomnijmy sobie jednak, że w $L(T)$ istnieje cykl $C_{x,y}$ zawierający x i y, czyli nawet po usunięciu e będzie istniała ścieżka łącząca x i y. Sprzeczność z faktem, że x i y są w różnych składowych $L(T) - e$.

Podsumowując, skoro każde dwa wierzchołki $x, y \in W$ muszą mieć wspólny koniec w T, zbiór W indukuje w $L(T)$ klikę o co najmniej pięciu wierzchołkach. Zauważmy, że jedyną sytuacją, kiedy co najmniej pięć krawędzi drzewa T się parami przecina, jest taka, gdy wszystkie one mają wspólny koniec, zatem W jest zawarte w Q_v dla pewnego v. Ale wówczas $\deg_T v \geqslant 5$, co daje sprzeczność z założeniem. $\square$