

1. (5p.) Ustalmy $n, k \geq 1$. Wierzchołkami grafu $G(n, k)$ są wszystkie ciągi o elementach ze zbioru $\{1, \dots, k\}$ i długości co najwyżej n (wliczając ciąg pusty długości 0). Dwa różne ciągi połączone są krawędzią, jeśli jeden ciąg jest prefiksem drugiego. Wyznacz $\chi(G(n, k))$.

Rozwiązanie. Pokażemy, że $\chi(G(n, k)) = n + 1$. Niech a będzie dowolnym ciągiem długości n i niech A będzie zbiorem wszystkich prefiksów a , łącznie z samym a . Oczywiście $|A| = n + 1$ i zbiór ten indukuje klikę w $G(n, k)$. Zatem $\chi(G(n, k)) \geq n + 1$. Z drugiej strony rozważmy funkcję, która każdemu ciągowi przypisuje jego długość. Zauważmy, że jest to poprawne kolorowanie wierzchołkowe, bo żaden ciąg nie jest prefiksem innego ciągu tej samej długości. Kolorowanie to używa dokładnie $n + 1$ kolorów (od 0 do n), zatem $\chi(G(n, k)) \leq n + 1$, co kończy dowód. $\square$

2. (5p.) Niech I będzie największym zbiorem niezależnym w grafie G , a J będzie zbiorem niezależnym w grafie $G - I$. Pokaż, że w grafie $G[I \cup J]$ istnieje skojarzenie pokrywające J .

Rozwiązanie 1. Zauważmy, że graf $H = H[I \cup J]$ jest dwudzielny. Przypuśćmy, że nie istnieje w nim skojarzenie pokrywające J . Z twierdzenia Halla oznacza to, że istnieje zbiór $J' \subseteq J$, taki że $|N_H(J')| < |J'|$. Rozważmy zbiór $I' = (I \setminus N_H(J')) \cup J'$. Z poprzedniej nierówności widzimy, że $|I'| > |I|$. Zauważmy, że I' jest niezależny: oczywiście $I \setminus N_H(J')$ jest zbiorem niezależnym i J' jest zbiorem niezależnym, a nie ma krawędzi między tymi dwoma podzbiorami, bo w pierwszym nie ma żadnych sąsiadów J' . Jest to sprzeczność z wyborem I . $\square$

Rozwiązanie 2. Zauważmy, że graf $H = H[I \cup J]$ jest dwudzielny. Oczywiście największy zbiór niezależny w H ma rozmiar $|I|$, inaczej przeczy to wyborowi I . Przypomnijmy sobie, że w każdym grafie dopełnieniem największego zbioru niezależnego jest najmniejsze pokrycie wierzchołkowe, zatem najmniejsze pokrycie wierzchołkowe w H ma rozmiar $|J|$. Z twierdzenia Königa-Egerváry'ego (z ćwiczeń) wiemy, że w grafie dwudzielnym rozmiar najmniejszego pokrycia wierzchołkowego i największego skojarzenia są równe. Zatem takie skojarzenie musi pokrywać J . $\square$

3. (5p.) Niech $G_1 = (V_1, A_1)$ i $G_2 = (V_2, A_2)$ będą grafami skierowanymi. Graf skierowany $G_1 \square G_2$ definiujemy następująco (podobnie jak dla grafów nieskierowanych):

$$V(G_1 \square G_2) = V_1 \times V_2,$$

$$E(G_1 \square G_2) = \{((u, v_1), (u, v_2)) : u \in V_1, (v_1, v_2) \in A_2\} \cup \{((u_1, v), (u_2, v)) : (u_1, u_2) \in A_1, v \in V_2\}.$$

Niech $N_1 = (G_1, c_1, s_1, t_1)$ i $N_2 = (G_2, c_2, s_2, t_2)$ będą sieciami. Rozważmy sieć $N = (G_1 \square G_2, c, (s_1, s_2), (t_1, t_2))$, gdzie

$$c(((u, v_1), (u, v_2))) = c_2((v_1, v_2)) \text{ i } c(((u_1, v), (u_2, v))) = c_1((u_1, u_2)).$$

Niech $K_1 = (S_1, \bar{S}_1)$ i $K_2 = (S_2, \bar{S}_2)$ przekrojami odpowiednio w sieciach N_1 i N_2 . Pokaż, że wartość największego przepływu w N wynosi co najwyżej $|\bar{S}_1| \text{cap} K_2 + |\bar{S}_2| \text{cap} K_1$.

Rozwiązanie. Ponieważ dla każdego przepływu f i każdego przekroju K zachodzi $\text{val} f \leq \text{cap} K$, wystarczy wskazać w sieci N przekrój K , dla którego zachodzi $\text{cap} K = |\bar{S}_1| \text{cap} K_2 + |\bar{S}_2| \text{cap} K_1$.

Rozważmy przekrój $K = (S, \bar{S})$, gdzie $\bar{S} = \bar{S}_1 \times \bar{S}_2$. Zauważmy, że jedynymi krawędziami z S do $\bar{S}$ są krawędzie postaci $((u, v_1), (u, v_2))$, gdzie $u \in \bar{S}_1$ i $(v_1, v_2) \in K_2$ lub $((u_1, v), (u_2, v))$, gdzie $(u_1, u_2) \in K_1$ i $v \in \bar{S}_2$. Zatem

$$\begin{aligned} \text{cap} K &= \sum_{u \in \bar{S}_1, (v_1, v_2) \in K_2} c(((u, v_1), (u, v_2)))) + \sum_{(u_1, u_2) \in K_1, v \in \bar{S}_2} c(((u_1, v), (u_2, v)))) \\ &= |\bar{S}_1| \sum_{(v_1, v_2) \in K_2} c_2((v_1, v_2)) + |\bar{S}_2| \sum_{(u_1, u_2) \in K_1} c_1((u_1, u_2)) \\ &= |\bar{S}_1| \text{cap} K_2 + |\bar{S}_2| \text{cap} K_1, \end{aligned}$$

co kończy dowód. □

4. (5p.) Niech $G = (V, E)$ będzie prostym grafem planarnym, samodualnym (czyli izomorficznym ze swoim grafem dualnym). Pokaż, że jeśli G ma co najmniej 3 wierzchołki, to ma co najmniej 2 wierzchołki stopnia nie większego niż 3.

Rozwiązanie. Nie wprost załóżmy, że G ma co najmniej 3 wierzchołki i co najwyżej jeden z nich ma stopień mniejszy lub równy 3. Zauważmy, że graf dualny jest zawsze spójny, więc w szczególności każdy wierzchołek G ma stopień co najmniej 1. Ustalmy rysunek płaski grafu G i niech F oznacza zbiór ścian. Wtedy:

$$2|E| = \sum_{v \in V} \deg(v) \geq 4(|V| - 1) + 1 = 4|V| - 3.$$

Graf G jest samodualny, więc $|V| = |F|$. Zatem, korzystając z formuły Eulera, otrzymujemy:

$$2|E| = 2(|V| + |F| - 2) = 2(2|V| - 2) = 4|V| - 4.$$

Ostatecznie: $4|V| - 4 \geq 4|V| - 3$, sprzeczność.

□